

Az elmélkedőknek

## ELŐSZÓ A MAGYAR KIADÁSHOZ

Nagy örömömre szolgál, hogy ez az írásom gyönyörű anyanyelvünkön is megjelenik. Ennek egyik oka, hogy a témával kapcsolatos érdeklődésem még otthoni középiskolás koromban kezdődött, több mint négy évtizeddel ezelőtt. Másrészt remélem, hogy a magyar olvasók is érdekesnek és sejtelmesnek tartják a hármas szám befolyását életünkre.

Köszönetem fejezem ki Pieke Andreának a remek fordításért, amely teljes hűséggel és remekül olvashatóan fejezi ki a matematikai finomságokat is, ami meglehetősen nehéz fordítói feladat.

Hálával tartozom Jeney Attilának – akivel együtt koptattuk a fent említett középiskolai padokat – az ábrák feljavításáért a magyar kiadás részére, ami jelentősen hozzájárult a könyv minőségéhez.

Komzsik Lajos

## A FORDÍTÓ AJÁNLÁSA

Ajánlom a könyvet mindenkinek, de különösen azoknak, akik az iskolapadban sandán tekintettek a matematikára, úgy érezték, hogy ez számukra érdektelen, és nem értették, mindez mire való.

Örülök, hogy ez a könyv talán közelebb hozza, né tán megszeretteti velük is a matematikát. Nagy hiányt érzek a matematika tanárok képzésében is, mert kevés szó esik a matematika történetéről, és általában a tudománytörténetéről.

Az emberi gondolkodás fejlődése legalább akkora kaland, mint Amerika felfedezése, vagy a Déli-sark meghódítása. Mégis érdemtelenül keveset tudunk azokról a hősookról, akik megalkották mai modern tudományunk alapjait. Olvasva ezt a könyvet, egy lépéssel közelebb juthatunk ahhoz, hogy ez ne így legyen.

Pieke Andrea

## ELŐSZÓ

Egy vélhetően végtelen világegyetem kicsi, véges részén élünk, és régóta megigéznek bennünket bizonyos számok, amelyek a többi számnál szorosabb kapcsolatba hozhatók az univerzummal. A mindenség és a legegyszerűbb, szerény hármas szám között látszik a legmélyebb összefüggés.

Bár a hármas számhoz egyszerű számlálással eljuthatunk, különös a kapcsolata sok olyan egyetemes jelenséggel, amely felkelti az ember kíváncsiságát. Ez megmagyarázhatja, hogy a mindennapokban sokszor használjuk, és hogy elbűvöli az embereket akkor is, ha a valóságos okok rejtve maradnak.

A könyv a hármas szám előfordulásait tekinti át régészeti leletek és vallási szimbólumokkal kezdve a biológiai és fizikai megjelenésekkel befejezve. Azonban a legnagyobb hangsúlyt a szám különböző matematikai szerepeire helyezzük, egyrészt mint geometriai és aritmetikai építőkö, másrészt mint a végtelenbe vezető út kapuja, illetve kapusa.

Ajánljuk a könyvet minden korosztálynak, diákoknak és felnőtteknek, akiket érdekel a történelem és

a matematika. A matematikai fejtegetéseket a lehető legegyszerűbben tárgyaljuk, hogy középiskolai végzettséggel is élvezhető legyen.

## 1. fejezet

### TRILITONOK ÉS TRIPTERONOK

A hármas szám legelső régészeti megnyilvánulásai talán azok az ősi kőemlékek, melyek három részből állnak: két nagy álló kőoszlopon keresztbefektetve egy harmadik kőlap. A régészek számos helyszínen sorolják az ősi építészeti maradványokat ebbe a csoportba.

Ilyen leletek találhatók Máltán több templomépület területén, vagy az egyiptomi Királyok völgyében feltárt templomok között. Ezekben az esetekben a háromtagú kő-együttesek szerepe kizárólag ajtó, vagy bejárat lehetett. Egy másik ismert előfordulása Maui szigetén (Hawaii) a királyi kertek kapuja.

A Stonehenge-i kőcsoport a legérdekesebb, egy hármas kőemlék az 1.1. ábrán látható. Mintegy 4500 évesre datálják és rejtély, hogy hogyan építették. Legtöbbször nem a közelben található köveket használták fel, hanem messziről szállították az építőanyagot a helyszínre. A régészek hevesen vitáznak a lehetséges szállítóeszközökről, de a legnagyobb titok maga az építkezés.

A legtöbb kő túl nagy ahhoz, hogy kézzel, vagy bármilyen leleményes, de emberi erővel működtetett eszközzel megmozdítsák. Stonehenge kőemlékei 20-24 láb magasak (6-7,3 m), a súlyuk 50 tonna körüli. Az a módszer elfogadható, hogy a két függőleges kőnek gödröt ástak a földbe, azonban a köveket a helyükre beemelni ma is heroikus teljesítmény. A piramisok építéséhez hasonló valódi titok, hogyan helyezték a harmadik követ a két álló kő tetejére. A földből emelt rámpákat – de csak jobb magyarázat híján – kényszerű megoldásnak tekintik.



1.1. ábra Stonehenge Triliton

Vitatott az építési mód, de még talányosabb, és a történészek hevesen vitatkoznak azon, hogy milyen célra szolgált. Nyilvánvaló, hogy Stonehenge kőemlékei

nem kapubejárat szerepét töltötték be. A két függőleges oszlop olyan közel áll egymáshoz, hogy lehetetlen áthaladni közöttük. Másrészt, ha valaki a kőcsoport közepén áll, bizonyos irányba tekintve különleges látványban lesz része. A téli és a nyári napforduló idején Stonehenge több hármas kőcsoportján át a napfelkelte és a naplemente látható, ezért a legnépszerűbb nézet szerint Stonehenge az akkori emberek csillagászati ismeretein alapuló naptár-szerkezet.

Sok más feltevés is létezik. Az egyik szerint Stonehenge más csillagrendszerből érkező földön-kívüli jövevények célpontja lehetett. Stonehenge körkörös elrendezésű öt kőhármasa volt az idegen űrhajó leszállóhelye. A külső kör, amely csak oszlopokból épül fel, és nincsenek vízszintesen keresztbefekvő kőlapok, a rakéta meghajtó kipufogását oszlathatta szét.

Mások úgy vélik, hogy a kőcsoport valamiféle energia-generátor, vagy gyűjtőberendezés. Nem túl sok fantázia kell hozzá, hogy a függőleges oszlopok közé optikai lencsét képzeljünk, amelyek a középpontba fókuszálják a napsugarakat. Az iskolai fizikaórán mindannyian láttuk azt a kísérletet, amikor a fókuszált fény elegendő hőt termel – legalábbis egy papírdarab meggyulladásához.

Stonehenge szerepének tárgyalásával nem az a célunk, hogy új hipotéziseket állítsunk fel, csak azt a tényt

szeretnénk leszögezni, hogy az ősi emberek rendkívüli nehézségek árán hoztak létre három, – nem kettő vagy négy, hanem három – kötömbből álló különleges építményeket. Bármi volt az indítékuk, ma is csodálattal tölt el bennünket, hogy három kötömböt használtak fel.

A három részből emelt építészeti alkotások ősi régészeti előfordulása a Zeusz-szentély Athénban, amelyet az első görög uralkodó, Deucalion építtetett. Időszámításunk előtt 515-ben kezdődött a templom építése, de hamarosan abbamaradt. Csak i.e. 175-ben fejezték be, IV. Antioch, szír király segítségével. A korintuszi stílusban alkotó római építész Cassutius volt (a korszak három meghatározó oszlopstílusa a dór, az ión, és a korintuszi).

Ez a templom 110 méteres hosszúságával, amely jóval meghaladja egy futballpálya hosszát, és 44 méteres szélességével az ókori világ egyik legnagyobb építménye. A templom három oszlopsora, melynek neve Tripteron, az 1.2. ábrán tekinthető meg. A középpontban állt a hatalmas, aranyból és elefántcsontból készült Zeusz-szobor, valamint Hadrianus császár szobra, akit Zeuszhoz hasonlóan istenként tiszteltek.

Modern statikai és építészeti megfontolásokkal magyarázható, hogy miért három oszlopsort építettek, de vajon nem volt-e mélyebb, isteni oka. A templomot az 5. században érte az első komoly rongálódás, és a későbbi

századok természeti csapásai, valamint az ember tevékenysége tovább pusztította. Végül 1852-ben egy földrengés az eredetileg 104 oszlopból megmaradt 16 oszlop egyikét is ledöntötte. Ez a földön fekvő oszlop ma is látható.



1.2. ábra Tripteron az athéni Zeusz-templomban

Három részre felosztani, vagy három részből felépíteni valamit – egyrészt matematikai másrészt filozófiai fogalom: ez a trichotómia. A matematikában klasszikus trichotómia, hogy két szám (a és b) között három lehetséges reláció állhat fenn:  $a < b$ ,  $a = b$  és  $a > b$ . Gyakran használjuk az  $x \leq y \leq z$  hármas alakot is, amely három mennyiség közötti trichotóm kapcsolatot jeleníti meg.

A matematikában, ahogy látni fogjuk, igen sokszor fordul elő a hármas szám.

A filozófiai gyökerek Arisztotelész görög filozófusig vezethetők vissza. Az i.e. 4. században élt, Thesszalonokihez közel született. Beutazta a görög területeket, majd felkérték, legyen Nagy Sándor nevelője. Később visszatért Athénba és megírta értekezéseit, amelyek máig fennmaradtak. Tanulmányai és írásai csillagászati, fizikai, földrajzi, filozófiai, etikai, politikai témaköröket ölelnek fel, egyszóval polihisztor volt.

Egyik művében a szépség három nélkülözhetetlen összetevőjéről ír, ezek: a teljesség, a kisugárzás és a harmónia. A fogalmak jelentésárnyalatai különféle értelmezéseket hoztak létre, de az nem változott, hogy hárman vannak. Arisztotelész a személy trichotómiáját is megállapította: egység, igazság és jóság, újabb értelmezésre váró fogalom-hármas.

Az ókori nézet szerint a három alapvető elem: a föld, a víz és a tűz. A föld az élet forrása, bizonyos fajta teremtő. A víz minden élet fenntartója a Földön. Végül a tűz minden földi és élő alany megsemmisítője. Ez a vallási trichotómiák alapja, így keletkeztek a különféle isten-háromságok.

Trimurti indiai istennek például három feje van, ezáltal nyilvánul meg a születés, élet és halál három

fázisa Brahma, Visnu és Siva személyében. Az 1.3. ábrán látható egy ősi faragvány, melyet sokan Hindu Háromságnak neveznek. Könnyen fölfedezhető a föld-születés, víz-élet és tűz-halál megfelelés.

A leggyakoribb értelmezés szerint középen Visnu az életet, két oldalán Brahma és Siva a születést és a halált jeleníti meg. Az idők folyamán az isten-háromból három különálló isten lett, és míg Brahma tisztelete megszűnt, Visnu és Siva követőit ma is megtaláljuk.



1.3. ábra A Trimurti

Tovább folytatódik a trichotómia: Visnu, az élet istene három inkarnációban, Krisna, Rama és Narajana személyében született újjá.

Babilonban is hármas istenség létezett: Anu, Enlil és Enki, de isten legnevezetesebb hármas megjelenése a kereszténységbeni Szentháromság: Atya, Fiú és Szentlélek. E hitrendszer az ember trichotómiájának filozófiai felfogásához kapcsolódik: mindannyian test, elme és lélek vagyunk.

Néhány tudós erősen vitatja ezt a trichotómiát, és a kettős felosztás elvét, a dichotómiát támogatja, mely szerint csak test és elme létezik. Ennek oka, hogy a keresztény Szentháromságból a Szentlélek a legkevésbé érthető és elfogadható. Valószínűleg azért, mert nehezen tudunk különbséget tenni a lelkünk és az elménk között.

Másrészt vannak, akik ragaszkodnak a hármas felosztáshoz abban a hitben, hogy a Szentháromság tulajdonképpen három istent jelent. Mellékesen a legtöbb keresztény oltárfestmény triptichon, azaz három részből áll. A Szentháromság második tagja Jézus, akiről még a nem-hívők is széles körben elfogadják, hogy élő ember volt, és ez már nem vitatéma. Életét és tanításait az Újszövetségben részletesen leírták, és a személyéhez köthető néhány esemény régészeti megerősítést nyert.

Gáspár, Menyhért és Boldizsár a három bölcs király története előzi meg Jézus születését: hárman voltak – és nem ketten vagy négyen – akik követték a betlehemi csillagot. A bölcsokről szóló elbeszélés nem a Bibliában jelenik meg először, utalások találhatók rá már időszámításunk első éveiben. Feltételezhetően Keletről érkeztek, Arábiából és különféle ajándékokat hoztak magukkal. Akár valóságos személyek voltak, akár képzeletbeliek, fontos, hogy hárman voltak, és a karácsonyi ajándékozás gyönyörű szokását hagyományozták ránk.

A hármas számnak sok további jelentős előfordulása fedezhető fel a keresztény kultúrában. A Sátán háromszor kísértette meg Jézust, Péter háromszor tagadta meg őt, három embert feszítettek keresztre azon a végzetes napon, és három nappal később történt a feltámadás. Három szöggel feszítették keresztre Jézust, aki ekkor 33 éves volt. Azután a három keresztényi erény: hit, remény és szeretet, újra és újra három.

Folytatva a gondolatmenetet, Istennek három prófétája: Mózes, Jézus és Mohamed hagyta ránk a zsidó, a keresztény és az iszlám vallást, napjaink három világvallását. Általánosságban elmondható, hogy az óriási különbségek ellenére egységesek abban, hogy egyetlen istent imádnak.

A muszlimok három szent városa Mekka, Medina és Jeruzsálem, ez utóbbit a másik két vallás hívei, a

zsidók és a keresztények is éppolyan szentnek tekintik. Az a tény, hogy Jeruzsálem ma a zsidó állam területén fekszik, nagyban hozzájárul a Közel-Kelet politikai instabilitásához. Mivel mindhárom – néha ábraháminak nevezett – vallás eredete földrajzilag évezredek óta ehhez a területhez köthető, nagyon valószínűtlen, hogy hamarosan megoldódik a kérdés.

Végül tekintsük át, hol jelenik meg a hármas szám az ókori mitológiában és történelemben. A görög mitológia gyakran utal a három gráciára, akik feltehetően Zeusz lányai, habár a különböző forrásokban némi eltérés található. Ezek a gyönyörű fiatal nők a bájt, a szépséget és a kreativitást testesítik meg, ahogy a modern gondolkodásban az eszességet, a szépséget és az egyéniséget. Számos középkori festmény és szobor ihletői voltak, mivel a művészek rajongtak értük. Az 1.4. ábrán Botticello Primavera (Tavaszi) című festményének egy részlete látható a gráciák ábrázolásával.

A történelemben is megtalálható a hármasság. A római korból a triumvirátus intézményét említhetjük. Ilyen, három uralkodóból álló csoportot először Julius Caesar hozott létre i. e. 60 körül. A triumvirátusban Caesar társai Marcus Crassus és Pompeius Magnus voltak. A sors kegyetlensége folytán kettőt (Pompeius és Caesart) meggyilkoltak, Crassus pedig a harcmezőn esett el, azonban a hármas uralkodás fogalma máig fennmaradt.

Olyan nagyszámú történelmi utalás lelhető fel, hogy lehetetlen mindet felsorolni egy olyan könyvben, mely nem a szám történelmi, hanem a matematikában betöltött szerepére fókuszál. Az a tény, hogy a történelem ontja ránk a hármas számmal összefüggő eseteket, egy mélyebb okot feltételez, amit érdemes alaposabban megvizsgálni.



1.4. ábra A három Grácia

## 2. fejezet

# EGY, KETTŐ, HÁROM ÉS A SZÁMLÁLÁS

Most tekintsük végig azt az utat, amelyen az ember eljutott a hármas számhoz.

Nem tudjuk, hogyan merült fel először az emberi gondolkodásban a számolás, de nagyon valószínű, hogy a történelem előtti időkben megjelent. A számoláshoz bizonyos ismétlődő egységek felhasználása szükséges, és az őskori ember megfigyelhette a napok váltakozását, a hold-fölkelte ismétlődését az éjszakai égen, nagyobb léptékben pedig az évszakok és az évek váltakozását. Kezdetben, mondjuk tízezer éve, papok, sámánok és gyógyító emberek privilégiuma lehetett a számok fogalmának megértése. Azonban hamarosan mindenki megtanult különbséget tenni a saját, és más törzsekben élő emberek száma között, vagy képes volt az élelmet biztosító zsákmányállatok mennyiségét meghatározni.

A hármas számhoz vezető út tehát elég lassú volt. Néhány ősi társadalomban az emberi számolás hajnalán az első számok: egy, kettő, sok. Még a múlt században is az afrikai hottentotta törzs csak háromig számolt, a

hármat követte a sok. Néhány ezer éven át a hármas szám jelentette a sokasághoz vezető határt! De azután a zsilip megnyílt és az emberiség valóban számolni kezdett a – mai nevén – természetes számokkal, egy, kettő, három, négy és így tovább a végtelenségig.

Az ókori Kínában már ismerték az aritmetika tudományát. Az összeadáshoz számolótáblákat használtak, sőt két különböző színű, fekete és piros pálcikákat alkalmaztak, ahol pirossal jelölték a feketéből kivonandó pálcikákat. Ezért a piros pálcikák a negatív számok őseinek tekinthetők. A kivonást úgy hajtották végre, hogy annyi fekete pálcikát vettek el, ahány piros volt az alatta levő sorban, és abban az esetben, ha nagyobb számot kellett kivonni egy kisebb számból, a megfelelő átvitelt is ismerték.

A következő logikai igény a számok „leírása” volt. A kínaiak és a sumérok könyvelést vezettek a mérhető javakról, feljegyezték például a császár ágyasainak számát, vagy hogy hány véka gabona van raktáron. A számok pontos történetét ebben az időszakban azért nehéz nyomon követni, mert az íráshoz felhasznált anyagok elenyésztek. A papirusz és az agyagtábla, amelyet e kultúrák alkalmaztak, szélsőséges körülményeknek nem áll ellen.

Biztosan a rövid vonalkák egyszerű lejegyzéséből – amely világosan utal arra, hogy fapálcikákkal számoltak – fejlődött ki a mai értelemben vett számírás

a ma használatos arab számokkal. Az egyiptomiak az |, ||, |||, stb. jeleket használták, és bizonyos pozíciós, illetve ismétlődő mintákkal ennél többet is kifejeztek. Az egyetlen pálcikától eltérő szimbólum  $\cap$ , amely a tízet jelölte. A babiloni ékírás jelei hasonlóak, de a pálcika fent vastagabb, amely az ékírás letről felfelé haladó technikájára utal. Valójában a hármas szám formájáról kialakított egyik hipotézis szerint az ékírásnál az íróeszköz alakja miatt a három vonás felső részei érintették egymást, és ezt a rajzolatot később elforgatták.

A maja számírás a „, ... -tal kezdődik, egészen ötig, melynek jele –. A nagyobb számokat ők is ismétléssel és pozicionálással fejezték ki. A kínaiak az –, =, ≡ után különböző jelekre tértek át, talán ellentétben a számozással, a szimbolizmus első megjelenése. A görögök az ábécé betűivel fejezték ki a számokat, és mint ismeretes, a római számok az egyiptomi jelek kiterjesztéséből keletkeztek: bevezették a V (öt), X (tíz), C (száz) stb. speciális szimbólumokat.

Ezekben az ősi jelölésrendszerekben legtöbbször a három volt a legutolsó megkülönböztetett „számlálási” jel, ezután újra az előző szimbólumokat alkalmazták. A legtöbb ősi és modern jelölésben a háromtól kezdődően különféle szimbólumokat használnak, speciális pozicionálást és ismétlődést, amely arra utal, hogy e szint fölött valamilyen szabályra van szükség.

Ezt a szabályt, a helyiérték-rendszert valószínűleg négyezer évvel ezelőtt a kínaiak találták fel. Abban az időben keletkezett, amikor a számolást a már említett, táblára elhelyezett fapálcikák segítségével végezték. A számolótáblára dobozokat tettek, a dobozokba különböző számú (maximum 5) pálcikát helyeztek, ennek segítségével egy dobozban egytől kilencig bármilyen szám definíciója lehetségessé vált. Az első négy pálcika függőlegesen állt, az ötöt egy vízszintes pálcia jelölte, és így tovább egészen kilencig, melynek alakja IIII. A dobozok elhelyezkedése mutatta a helyi-értéket. Ha a táblán három doboz volt, az első doboz felelt meg a százak, a második a tízes és a legutolsó az egyes helyi-értéknek. A táblán az egy sorban lévő, jobbra igazított dobozok olyan általános definíciót tettek lehetővé, hogy a több sorban elhelyezett dobozokat tartalmazó táblákból hatékony összeadási eszköz keletkezett.

A helyiérték-rendszert a sumérok is feltalálták, az utánuk következő babiloniak pedig megőrizték. Átvették a hatvanas alapú számrendszert (figyelemre méltó, hogy a 60 osztható hárommal). Az írásos bizonyítékok azt sugallják, hogy például a következő jelölés: 1,2,3 (ahol a ' , 'a számjegyek elhatárolására szolgál a nyomtathatóság kedvéért) számértéke

$$1 + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 60 \cdot 60.$$

Létezik olyan régészeti bizonyíték, amely szerint mintegy 4000 évvel ezelőtt, amikor a sumér birodalmat

és kultúrát a babiloni váltotta fel, a hinduk is alkalmazták a tízes számrendszert, vagyis a mi decimális rendszerünket. Ennélfogva nem tudjuk, kik voltak az eredeti feltalálók, valószínű, hogy mindhárom kultúra együttesen.

Az, hogy pozitív és negatív számokat is használtak, és kifejlődött a helyiérték-rendszer távolról sem jelenti azt, hogy felmerült volna a nulla fogalma. Fennmaradtak olyan ősi ékírásos babiloni agyagtáblák, amelyeken az alapszám bizonyos hatványaira nem volt megfelelő kifejezési mód, például 3601 a babiloniak írásmódja szerint 1,,1 azaz  $1 \cdot 1 + 1 \cdot 60 \cdot 60$ . Az egymás után írt két vessző a hiányzó jelre utalt (a 60 szorzójára), de nem létezett olyan szimbólum, amely ezt kifejezi.

Úgy tűnik, hogy időszámításunk első századaiban hindu matematikusok vezettek be egy eredeti szimbólumot a helyiérték-rendszer üres pozíciójára. Néhány ősi hindu kéziratban az üres pozíciót egy pont jelöli, a nulla korai elődje. Azonban elég nagy ugrás, amíg eljutunk addig, hogy a nulla szimbólumot bevezessük és számnak tekintsük. Ez utóbbi hőstett is Indiához köthető, de sokkal későbbi időkben.

Brahmagupta hindu tudós a 7. században élt India észak-nyugati részén. Hivatásos csillagász volt, obszervatóriumot működtetett, de aktívan foglalkozott matematikai kérdésekkel és számos írását széles körben

ismerték abban az időben. Főleg a geometria érdekelte, egy képletet is elneveztek róla, amely a körbe írt négyszög területére vonatkozik. A kör vizsgálata során a  $\pi$ -re is szüksége volt,  $\pi$  közelítő értékének a hármast tekintette. Ezt a témát később tárgyaljuk.

Úgy látszik, ő volt az első, aki néhány, a nullával kapcsolatos aritmetikai szabályt lefektetett. Felismerte és megállapította, hogy ugyanakkora pozitív és negatív számok összeadásának eredménye nulla, vagy ha bármihez hozzáadunk nullát, az összeg nem változik. Nehézségbe ütközött, amikor megpróbált nullával osztani, ahogy sokan mások azóta (és még napjainkban is), mindazonáltal elsőként végzett el korrekt aritmetikai műveleteket, ahol a nulla is szerepelt.

A hindu tudás végül az arab országokban is ismertté vált, és a 9. században a perzsa Al'Kvarizmi foglalta írásba. Élettörténete nem igazán ismert, kivéve, hogy különböző forrásokban számos variációban megtalálható neve a születési helyére utal, valahol a Perzsa birodalom területén, amely ma Üzbegisztán része. Kétségtelen, hogy éveket töltött a bagdadi könyvtárban, amely akkoriban a tudományos kutatás egyik központja volt.

Munkáiban az első- és másodfokú egyenletek megoldásával foglalkozott. Valamikor a 12. században fordították latinra, és a ma használatos „arab” számok innen eredeztethetők. Nevének latin változatából (Algorismus)

származik az algoritmus szó. A könyv (nagyon lassan) elterjedt Európában, de végül az egész kontinens megismerte. Néhány részét, így magát a nullát széles körben sokáig nem fogadták el, és néhány száz évig tartott, mire mindenütt igazán áthatotta a matematikai gondolkodásmódot.

Egy másik nagyon fontos fogalom a törtszám. Mihelyt az emberiség gondolkodásában elterjedt a számolás, hamarosan fel kellett merülnie, hogy az egész részeit is leírassák. A családtagok közötti élelemelosztásból következtek a törtek, azaz az egész fele, harmada, negyede stb. Mivel ezekben a törtekben mindenütt egy a számláló értéke, Egyiptomban egyszerű jelölésmód alakult ki. Az egyiptomiaknál a szám felett elhelyezett pont jelölte a törteket, például III modern jelöléssel  $\frac{1}{3}$ , azaz egyharmad.

Az egyiptomiak ezt tudománnyá fejlesztették azáltal, hogy a törteket olyan törtek összegeként írták fel, amelyek számlálója egy. Ez bizonyos aritmetikai jártasságot is megkívánt, különösen az összeadás és a kivonás esetében. Speciális szabályokat fejlesztettek ki, amelyek mai szemmel nem bizonyulnának helyesnek. Azonban az egyiptomiaknál  $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$  és hasonló esetekben is pontosan számoltak. A szabályok a törtek felbontását egészen négytagú összegig határozták meg.

A törtekkel kapcsolatosan a hármas szám hirtelen a végtelenbe vezető kapunak tűnik. Ha egyet elosztunk

hárommal, akkor az első olyan törtszám keletkezik, amelynek végtelen sok számjegye van:

$$1/3 = 0,3333333... = 0,\dot{3}$$

ahol a hármas feletti pont jelöli, hogy a számjegyet végtelen sokszor ismételni kell.

Továbbá, ha a természetes számokat osztjuk hárommal, akkor 0, 3, vagy 6-ból álló végtelen számjegysorokat kapunk:

$$1/3 = 0,\dot{3}; \quad 2/3 = 0,\dot{6}; \quad 3/3 = 1,0$$

Az osztás fogalma vezetett a nem-természetes számok egyik osztályához: a racionális számokhoz. Ezek mindig felírhatók két egész szám hányadosaként. Az egész számok a természetes számokat és negatív megfelelőiket tartalmazzák.

Az osztáshoz kapcsolódóan a hármas szám más érdekes tulajdonságokkal is rendelkezik. Egy természetes szám akkor osztható hárommal, ha a számjegyeinek összege osztható hárommal. Egy egyszerű példa 12, számjegyeinek összege 3, amely nyilvánvalóan osztható hárommal. Egy másik példa 18, ahol a számjegyek összege (9) osztható hárommal. Megjegyezzük, hogy ha egy hárommal osztható szám számjegyeit felcseréljük,

akkor az így kapott szám is osztható hárommal. A fenti példákhoz csatlakozva tekintsük 21-et és 81-et.

Egyszerű matematikai eszközökkel nagyon könnyen bizonyítható ez az oszthatósági szabály. Tekintsük az  $n$  egész számot

$$n = d_0 + d_1 \cdot 10 + d_2 \cdot 100 + d_3 \cdot 1000 \dots$$

ahol  $d_0, d_1, \dots$  a számjegyeket jelenti. A számjegyek összege:

$$s = d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots$$

Kivonva egymásból

$$n - s = 9 \cdot d_1 + 99 \cdot d_2 + 999 \cdot d_3 + \dots$$

A jobb oldalon mindegyik szám osztható hárommal, mert 9, 99, 999, ... mind osztható hárommal. Ezért az

$$n = s + 9 \cdot d_1 + 99 \cdot d_2 + 999 \cdot d_3 + \dots$$

összefüggésből következik, hogy  $n$  osztható hárommal, ha a számjegyeinek összege is osztható hárommal. Például 12345 osztható, mert a számjegyek összege 15 is osztható hárommal. Valóban  $12345/3=4115$ . Meglehetősen különösnek tűnhet az egész számok hárommal oszthatósága és az egyébként közönséges

osztás speciális tulajdonsága, ha hárommal osztunk, de mindez a következők fényében kevésbé figyelemre méltó.

Meglepődünk a végtelen hirtelen felbukkanásán a hármas számhoz kapcsolódóan, de az is lehetséges, hogy nem a megfelelő összefüggésben tekintjük, azaz nem az univerzum keretén belül – bármit jelentsen is ez. Lehet, hogy titokzatos tulajdonságait nem maga a szám hordozza, hanem a mi értelmezésünk. Ez megmagyarázná, hogy nem értjük teljesen a hármas szám szerepét, és azt, hogy a végtelenbe vezető kapuként viselkedik. Lehetséges, hogy a saját testünkön, kezünk tíz ujján alapuló tízes számrendszerünk nem a legmegfelelőbb, hogy jelentőségéhez mértén tekintsünk néhány számra és azok valódi szerepére. Például a 0,333... végtelen tizedes tört egyszerűen 0,1 a hármas alapú számrendszerben.

Lássuk, hogyan működik ez a rendszer. A hármas alapú számrendszerben csak három számjegy van: 0, 1 és 2 és értékük megegyezik a tízes számrendszerbeli megfelelőjükkel. A hármas számrendszerben azonban 3-ból 10 lesz,  $1 \cdot 3 + 0 \cdot 1$ . Folytatva ezt a logikát a tízes számrendszerben 0,333... =  $1/3$  a hármas számrendszerben 0,1 azaz  $0 \cdot 1 + 1 \cdot 3^{-1}$  vagy  $0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{3}$ . Bár előnyös, hogy a hármas számrendszerben véges számú számjegy ír le bizonyos számokat, amelyeket a tízes számrendszerben végtelen sok számjegy jelenít meg,

ösztönös ellenállást érzünk, mivel hozzászoktunk a tíz számjegyhez.

A matematika különböző területein számos további trichotómiát fedezhetünk fel. Például háromféle statisztikai átlagot ismerünk: a jól ismert számtani közép  $f = (a+b)/2$ , a mértani közép  $g = \sqrt{ab}$ , és a ritkán használt harmonikus közép  $h = 2ab/(a+b)$ . Ezt a három definíciót nemcsak két szám esetén értelmezhetjük, hanem tetszőlegesen kiterjeszthető.

Végül tekintsük a három és egy egészen speciális szám, a  $\pi$  sajátos szomszédságát; sok approximáció alapját képezi a hármas szám. Az egyik legérdekesebb  $\pi$ -approximáció a következő képlettel írható le:

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{3 \cdot 2 + \frac{3^2}{3 \cdot 2 + \frac{5^2}{3 \cdot 2 + \frac{7^2}{3 \cdot 2 + \dots}}}}$$

A három rögzített, ismétlődő szerepe lényeges kapcsolatra utal a legegyszerűbb számok, a természetes számok egyik eleme és az ámulatra méltó  $\pi$  között. És ez csak előfutára sok más, később tárgyalt és fejtrést okozó egybeesésnek.

A hármas számnak az ókori világ három híres megoldatlan feladatában is fontos szerepe van. Ezek: a kör négyszögesítése, a szögek harmadolása és a kocka megkétszerezése a következő fejezet témái.

### 3. fejezet

## AZ ÓKOR HÁROM KIHÍVÁSA

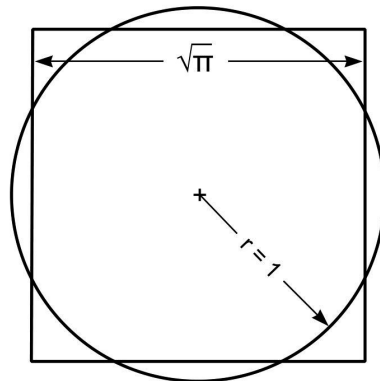
Korokon átívelve sok ember fantáziáját rabul ejtette ez a három probléma, amely a geometria fejlődésére óriási hatást gyakorolt. E feladatok megoldása a geometriával foglalkozó matematikus-generációk sorát évezredekken keresztül gyötörte. Sokan hitték, hogy találtak megoldást, csakhogy később ezek hibásnak bizonyultak.

Az első, és a legszélesebb körben ismert feladat a kör négyszögesítése: olyan négyzetet keresünk, amelynek területe megegyezik az adott kör területével, és csak egyenes vonalzó és körző használható a szerkesztésnél. Ezt a feladatot már a napjainkban Rhind-papiruszként ismert dokumentumban leírták. Az iratot egy Ahmes nevű egyiptomi írnok másolta le egy i.e. 17. századból származó ősi papiruszról.

Ahmesről nem túl sokat tudunk, de úgy tűnik, igen jártas volt az aritmetikában. Sok egyiptomi módszert írt le a törtek összeggé alakításáról, amit röviden említettünk az előző fejezetben. A Rhind-dokumentumban

Ahmes a következő megoldást adta: a négyzet oldala a kör átmérőjének  $8/9$  része. Ez ésszerű közelítést adott a  $\pi$  értékére:  $256/3^4 = 3,16$  összehasonlítva  $3,14$ -gyel egy decimális jegyig pontos. Megjegyezzük, hogy ismét a hármas szám fordul elő a képletben.

A probléma megoldása azonban, hogy szerkesszünk egy  $\sqrt{\pi}$  hosszúságú szakaszt, ha a kör sugara 1 egység, mégpedig klasszikus eszközökkel, egyenes vonalzóval és körzővel. A 3.1. ábrán látható a feladat.



3.1. ábra A kör négyzögesítésének problémája

A  $\pi$  az egyik legbámulatosabb szám, amellyel az emberiség valaha találkozott. Nyilvánvaló, hogy nem egész, de ha racionális szám lenne, valószínűleg a szerkesztés megoldható volna.

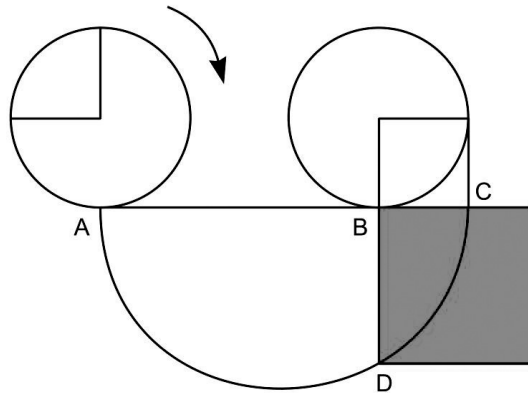
Századokon át tartó meddő munka után sajnálattal megértették, hogy a  $\pi$  nem racionális szám. 1761-ben Lambert svájci matematikus bebizonyította, hogy a  $\pi$  irracionális. Az irracionális számok, ahogy a nevük is jelzi, nem írhatók fel két egész szám hányadosaként. De ez még nem a történet vége.

Az 1840-es években a francia Liouville úgy határozta meg a transzcendens számokat, hogy azok nem lehetnek egész együtthatós algebrai egyenletek megoldásai. Ez a feltétel sokkal erősebb, mint ami az irracionális számokra vonatkozik. A  $\pi$  transzcendens tulajdonsága miatt a kör-négyszögesítés feladatát nem lehetne megoldani a klasszikus geometriai eszközökkel, az egyenes vonalzóval és a körzővel.

Végül 1881-ben Lindemann német matematikus be is bizonyította a  $\pi$  transzcendens mivoltát. A matematikusokat sok századon keresztül lefoglaló négyszögesítési probléma elcsitult. Vagy mégsem?

Természetesen más módon megoldható a feladat, ha enyhítünk a szerkesztési feltételeken, és nemcsak egyenes vonalzót és körzőt használhatunk, lásd 3.2. ábrát.

A baloldali egységkört „elgurítjuk” egy vízszintes mentén egy fél fordulattal, azaz 180 fokkal. A bejelölt körcikk mutatja a mozgás irányát. Ekkor A és B pont távolsága a kör kerületének a fele, vagyis  $\pi$ . Az elforgatott kör véghelyzetéből következik, hogy a BC szakasz hossza 1 egység.



3.2. ábra A kör négyzögesítése

Rajzoljunk egy félkört az AC átmérő fölé. A B pontból húzott függőleges egyenes a félkört a D pontban metszi. Mivel ABD és DBC hasonló háromszögek, a megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC},$$

amelyből következik, hogy

$$AB \cdot BC = BD^2.$$

Mivel  $BC=1$  az egységsugarú kör miatt, és a szerkesztés folytán  $AB=\pi$ , következik, hogy

$$BD = \sqrt{\pi}.$$

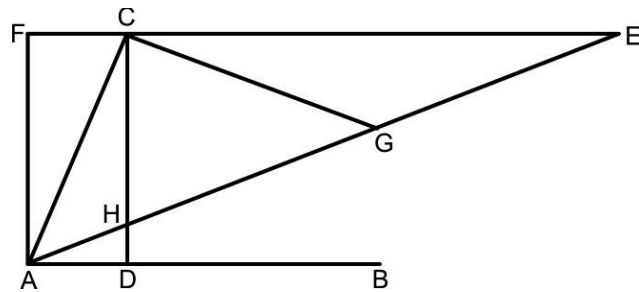
Tehát a BD oldalú négyzet és az egységsugarú kör területe egyenlő. A megoldás menete nem tiszta geometriai szerkesztés, mivel a kör „elgurítása” logikai (és talán kézi) folyamat, de egzakt megoldást kaptunk.

A három antik kihívás második feladata a szögek harmadolása egyenes vonalzó és körző segítségével. A harmadolás azt jelenti, hogy a szöget három egyenlő részre osztjuk. Bizonyos szögek harmadolása a klasszikus eszközökkel nyilvánvalóan megoldható. A 180 fokos szög felosztása három hatvan fokos szögre azzal a jól ismert módszerrel történik, hogy a kör kerületére körzővel felmérjük a kör sugarát.

Azonban egy tetszőleges szög harmadolása ezekkel az eszközökkel lehetetlen. Ha egy kissé enyhítünk a feltételeken, és megengedünk jelölést a vonalzón, akkor a feladat megoldható, ahogy az i.e. 5. században Hippocrates bemutatta. Görögországban, Chios-ban született és geometriai munkáiban számos drágakövet találhatunk, mint például a szögharmadolási-probléma megoldását. Néha összetévesztik azonos nevű orvos kortársával, aki a görögországi Kos szigetén élt, és az orvostudomány atyjaként ismert.

Hippocrates harmadolási szerkesztése a 3.3. ábrán látható. Adott a CAB szög, melynek A csúcsa az AB szakasz egyik végpontja. Mérjük fel az AC szakasz hosszát a vonalzóra kétszer egymás után, így három jelölést

kapunk. Húzzunk egy  $AB$ -val párhuzamos egyenest a  $C$  ponton keresztül, megkapjuk az  $FC$  egyenest. Végül rögzítsük a vonalzó első bejelölését az  $A$  pontra, és addig forgassuk a függőlegetől kezdve, amíg a harmadik jel az  $FC$  egyenesen kijelöli az  $E$  pontot. Az  $EAB$  szög harmada az eredeti  $CAB$  szögnek.



3.3. ábra Szögharmadolás

A bizonyításhoz azt használjuk fel, hogy a szerkesztés során egyenlő szárú háromszögek keletkeztek, mint a  $CGE$  háromszög. A részleteket kihagyjuk, mivel az eredmény a fontos, az, hogy megengedve a vonalzó bejelölését, bármely szög harmada megszerkeszthető. Ha a használt eszközt kicsit tökéletesítjük, vagy a szigorú szerkesztési feltételeken lazítunk, egy régi geometriai probléma megoldódott.

A harmadik ókori kihívás a kocka megkétszerezése csak egyenes vonalzó és körző segítségével. A feladat

az, hogy meghatározzuk egy olyan kocka oldalhosszát, melynek térfogata kétszerese egy adott kockának. Algebrailag ez egyszerűen kifejezhető:

$$b^3 = 2a^3,$$

ahol  $b$  a még ismeretlen kétszeres kocka oldalát,  $a$  pedig az adott kocka oldalhosszát jelenti. Könnyen belátható, hogy a megoldás

$$b = \sqrt[3]{2} \cdot a.$$

Itt a  $\sqrt[3]{2}$  jelentése: kettő harmadik gyöke. Ha egy szám négyzetéből gyököt vonunk, az eredeti számot kapjuk. Ugyanúgy egy harmadik hatványra emelt szám harmadik gyöke az eredeti számot adja eredményül. Egyszerűen:

$$(\sqrt[3]{2})^3 = 2.$$

Tehát, ha  $\sqrt[3]{2}$  megszerkeszthető, akkor a kettőzött kocka is megszerkeszthető. Ennek a problémának sincs megoldása, ha jelölés nélküli egyenes vonalzót és körzőt használunk.

Először Hippocrates dolgozott a kocka-kettőzési problémán, aki egy kis trükk segítségével megoldotta a szög-harmadolás kérdését. Geometriailag a következőképpen fogalmazta át egy ekvivalens feladattá: ha adott

két párhuzamos egyenes  $l_1$  és  $l_2$ , találjuk meg azt a két különböző  $x$  és  $y$  egyenest, amelyekre igaz, hogy

$$l_1: x = x: y = y: l_2.$$

Hippocrates azt állította, hogy ha ez a két egyenes megszerkeszthető, akkor a kocka kétszerezése is végrehajtható. Nem tudjuk, hogy sikerült-e neki ez a szerkesztés. Abban az időben nem volt teljesen világos, miért igaz az állítása.

Az i. e. 4. században Menaechmus követte Hippocrates elgondolását, és algebrai kifejezést fogalmazott meg rá. A rendkívül sok, geometriával foglalkozó ókori görög tudós egyik jelentős képviselője volt, szülővárosa ma Törökország területén fekszik. Munkáiban az ellipszist, a parabolát és a hiperbolát vizsgálta, azaz a kúpszeleteket – valójában neki tulajdonítjuk ezek felfedezését. A kúpszeletek segítségével sok geometriai problémát megoldott, beleértve a kocka kétszerezését is.

Követve Menaechmus gondolatmenetét, az egyszerűség kedvéért legyen  $l_1 = 1$  és  $l_2 = 2$  ekkor

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}.$$

Ezt két egyenletre bontva:

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{2} \rightarrow xy = 2$$

és

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{2} \rightarrow y^2 = 2x.$$

Ezek egy hiperbolát és egy parabolát adnak, amelyek metszéspontja:

$$y^2 = 2 \frac{2}{y} \rightarrow y^3 = 4.$$

A megoldás

$$x = \frac{2}{y} = {}^3\sqrt{2},$$

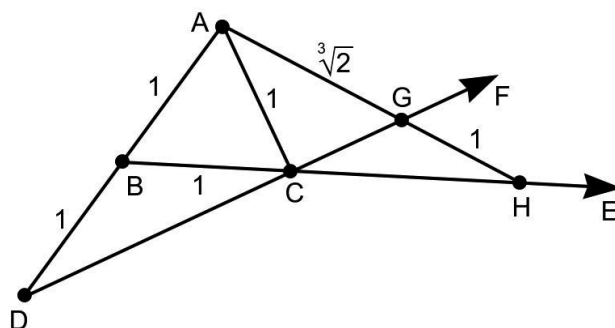
a szám, amely a kettőzéshez szükséges. Miközben az analógia indokoltá teszi a geometriai állítást, feltűnő, hogy az egyenesek megszerkesztése közben egy még nehezebb problémával, a kúpszeletek metszésével találjuk szembe magunkat.

Életrajzuk rövid részleteit bemutatva tisztelettel adóztunk és adózunk továbbra is az ókori matematikusoknak, hogy életükben és műveikben időrendi és kulturális összefüggésekre mutassunk rá. Ha egy modern tudós a második évezredben kiérdemel hasonló megbecsülést, akkor az Isaac Newton, aki 1643-ban az angliai Lincolnshire-ben született és 1727-ben halt meg. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* c. műve 1687-ben jelent meg, és valószínűleg a legnagyobb hatást kiváltó tudományos munka, amelyet valaha megírtak.

Hatalmas eredményeket ért el a fizika, különösen a mechanika területén, és megalkotta a differenciál- és integrálszámítást a matematikában. E témákkal később foglalkozunk.

Newton kincsesládájában olyan matematikai gyémántokat hagyott ránk, mint a kocka-kettőzés általa javasolt leleményes megoldása a 3.4. ábrán. Az eredeti szabályokon annyit könnyített, hogy megengedte a vonalzó az egységnyi hossz bejelölését.

A szerkesztés egy szabályos háromszögből indul ki, melynek minden oldala 1, vagy egy szabályos háromszög is megszerkeszthető, és ennek oldalhossza adja a vonalzó egységnyi jelölését. A háromszög csúcsai A, B, és C. Meghosszabbítva az AB oldalt, és felmérve rá az egységet a B ponttól, megkapjuk a D pontot. A D és C pont által meghatározott egyenest a nyíl irányába meghosszabbítva kapjuk az egyik szerkesztési vonalat. Ugyanígy a BC oldalt a nyíl irányába tetszőlegesen meghosszabbítva egy másik egyenes keletkezik. Végül a vonalzót rögzítsük az A ponthoz és csúsztatva forgassuk el addig, amíg az egységszakasz a vonalzó pontosan a két szerkesztési vonal közé esik (azaz  $GH = 1$ ), így megkapjuk az AG szakaszt, amelynek hossza  $AG = \sqrt[3]{2}$ .



3. 4. ábra A kocka megkettőzése

Ez bebizonyítható a szabályos háromszög szögein alapuló trigonometriai összefüggések felhasználásával. A részletekkel itt nem kívánunk foglalkozni, de a megoldásból világosan kitűnik Newton zseniális belső látása.

Összefoglalva, valahogyan mindhárom antik feladatot megoldották, de egyiket sem azokkal az eszközökkel, amelyeket eredetileg, a probléma felvetésének korában megkívántak. A megoldásokban a hármas szám implicit szerepe a háromszögeken keresztül nyilvánult meg; ez következő fejezetünk témája.

## 4. fejezet

# GÖRÖG MATEMATIKUSOK ÉS A HÁROMSZÖGEK

A régi görögök nagyra becsülték a háromszögeket és kihasználták azt a tényt, hogy három, nem egy egyenesen elhelyezkedő pont egy síkot határoz meg. Három ilyen pont egyetlen rajtuk áthaladó kört is definiál. Jól ismerték a tudósok azt is, hogy a háromszög az egyetlen olyan tökéletes alakzat, amelyet ha egy mechanikai szerkezetbe beépítünk, még akkor sem változtatja meg az alakját, ha a sarokpontokban elfordulhat, kivéve, ha az oldalak hajlékonyak.

Ez nagy jelentőséget kölcsönzött a háromszögeknek az antik építészeti gyakorlatban.

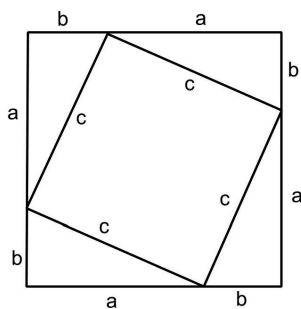
Pitagorász, a görög matematikusok doyenje Samos szigetén született, de élete nagy részét a mai Olaszország területén lévő Crotonban töltötte az i.e. 6. században. Matematikai iskolát vezetett, és nagyon szigorú elvek szerint élt.

Iskolájába nők is járhattak, ez igen szokatlan volt abban az időben, amikor a nőket még tulajdonnak tekintették. Óriási hatása korszakokat élt túl annak

ellenére, hogy eredeti műveinek egyetlen írott másolata sem maradt ránk.

Leghíresebb tétele, hogy a derékszögű háromszögben a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével. Ezt a szabályt már sokkal korábban a babiloniak is ismerték, de Pitagorásznak tulajdonítjuk a minden derékszögű háromszögre érvényes általános bizonyítást. A 3, 4 és 5 oldalhosszú háromszög bemutatja a szabályt, mivel  $3^2 + 4^2 = 5^2$ . Ez az egyetlen, három egymást követő egész számból álló halmaz, amelyre igaz a tétel, ezért néha pitagorászi számhármásnak hívjuk.

Sőt, Pitagorász a hármast számot „tökéletes számnak” nevezte, nemcsak azért, mert az előző összefüggés a hármastól indul, hanem mert felismerte a szám különleges szerepét sok matematikai fogalomban, szabályban, hipotézisben és sejtésben. Az ő megnevezése valóban érdemes arra, hogy a könyv alcíme legyen.



4.1. ábra Pitagorász tétele

A tétel bizonyítása igen egyszerű, ahogyan azt a 4.1. ábra mutatja: egy négyzet területe egyenlő belső részterületeinek összegével. A felosztás egy kisebb négyzetből és négy egybevágó háromszögből áll, melyek összterülete:

$$c^2 + 4 ab/2.$$

A nagy négyzet oldalhossza  $a + b$ , ezért a területe:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4 ab/2.$$

Mivel ugyanazt a geometriai területet foglalják el, ezért egyenlők, ebből következik a tétel

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Néhány feljegyzés szerint a piramisok építése során az egyiptomiak olyan 12 egység hosszú kötelet használtak, amelyen csomók jelölték ki a 3, 4 és 5 egység hosszát, és ezzel mérték fel a derékszögű háromszöget, melyet egyiptomi háromszögnek is neveztek. Nyilvánvaló, hogy a hármas szám geometriai megjelenési formája, a háromszög nagyon korai időktől elterjedt az emberi gondolkodásban.

Pitagorász a háromszög és bizonyos számok között keresett összefüggéseket. Néhány számot úgy osztályozott, mint háromszögű számok, az első néhány

3, 6, 10, 15,...

Az osztályozás alapja a számok geometriai elrendezése

1  
1 1  
1 1 1  
1 1 1 1

amelyből nyilvánvaló, hogy  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ . Felismerte a páratlan számok összege és a négyzet-számok közötti speciális kapcsolatot:

$$1 + 3 = 4$$

és

$$1 + 3 + 5 = 9,$$

és így tovább

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$

Egy másik nevezetes háromszögletű szám-minta a Pascal-háromszög, amelyet már az ókori Kínában ismertek. Ma a 17. századi francia matematikusnak tulajdonítjuk, aki az anekdota szerint egy szerencsejáték-probléma megoldása közben akadt rá erre az

elrendezésre. A háromszög két szélén egyesek állnak, a közbülső számokat pedig a fölötte levő sorban lévő két szám összegéből kapjuk meg:

$$\begin{array}{cccc}
 & & 1 & \\
 & & & 1 & \\
 & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & 2 & 1 \\
 1 & & 3 & 3 & 1
 \end{array}$$

Ezek megfelelnek a binomiális együtthatóknak:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^0 &= 1 \\
 (a + b)^1 &= 1 \cdot a + 1 \cdot b \\
 (a + b)^2 &= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 \\
 (a + b)^3 &= 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3
 \end{aligned}$$

Figyelemre méltó, hogy a Pascal-háromszögben az ötödik sortól kezdve jobbról és balról a harmadik elem megadja az összes pitagorászi számhármast, mint a kővérrel jelölt elemek mutatják:

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 4 & \mathbf{6} & 4 & 1 \\
 1 & 5 & \mathbf{10} & \mathbf{10} & 5 & 1 \\
 1 & 6 & \mathbf{15} & 20 & \mathbf{15} & 6 & 1 \\
 1 & 7 & \mathbf{21} & 35 & 35 & \mathbf{21} & 7 & 1 \\
 & & & \dots & & & & 
 \end{array}$$

Maguk a háromszögek is számos trichotómiát mutatnak. A szögek szerinti osztályozás eredménye:

hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszög. Egy másik osztályozás az oldalak hosszán alapul. Az egyenlő szárú és egyenlő oldalú háromszögnek két, illetve három azonos hosszúságú oldala van. Az általános háromszögnek mindhárom oldala különböző hosszúságú. A speciális háromszögeket nagy érdeklődéssel és részletesen tanulmányozták az évezredek során.

A legfontosabb talán az egyenlő oldalú háromszög (mindhárom oldala egyenlő), mivel a háromdimenziós szabályos testek építőeleme, ezekről egy későbbi fejezetben lesz szó. Az egyenlő oldalú háromszög egy másik kitüntetett szám – melyet minden korban tisztelet övezett –, az aranymetszés geometriai kiindulási pontja. Ez az arány egyszerűen definiálható: egy egységet úgy osztunk fel, hogy a két rész aránya megegyezzen a nagyobbik rész és az egész arányával. Algebrailag kifejezve:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}.$$

Egyszerű átrendezéssel a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

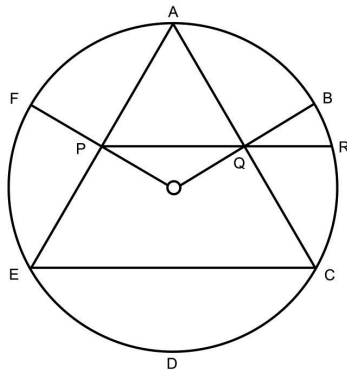
melynek megoldása a jól ismert képlet segítségével

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ez az aranymetszés, más néven isteni arányosság. Úgy vélték (és még ma is az a vélemény), hogy esztétikailag rendkívül vonzó. Sok művész alkalmazta, például Leonardo híres vázlatán a kinyújtott karú férfi ábrázolásakor.

Némelyek úgy tartják, hogy a piramisok bizonyos méretarányai ugyancsak az aranymetszést követik, de ez meglehetősen spekulatív, mivel ezeket az arányokat néhány bizonytalan egységben lemerített távolságok alapján számították ki. A geometriai megoldás nehéznek tűnik, mivel  $\sqrt{5}$  csak végtelen sok számjeggyel kifejezhető irracionális szám és ez hatalmas akadály. Azonban ha a művészetben akarjuk alkalmazni a számot, szükség van körszövel és egyenes vonalzóval végrehajtható geometriai szerkesztésre. Mint kiderült, ez meglepő módon az egyenlő oldalú háromszög segítségével meglehetősen könnyű.

Rajzoljunk egy kört az  $O$  pont köré és a kör tetszőleges  $A$  pontjából kiindulva a kör sugarát ismételten felmérve kapjuk a  $B, C, D, E, F$  pontokat. Ha összekötjük az  $A, C$  és  $E$  pontokat, egyenlő oldalú háromszöget kapunk, mint a 4.2. ábrán látható.

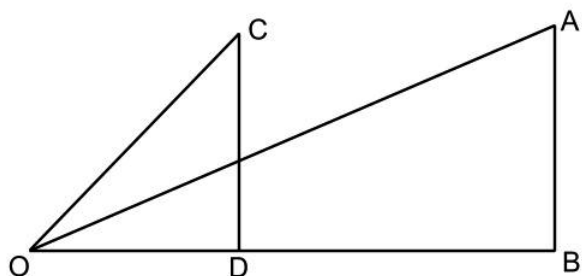


4.2. ábra Aranymetszés a háromszögben

Ezután kössük össze a  $B$  és  $O$ , valamint  $F$  és  $O$  pontokat, két metszéspont keletkezik a háromszögön  $P$  és  $Q$ . Végül rajzoljuk meg a  $PQ$  egyenest, ennek metszéspontja a körrel az  $R$  pont. E három pont megadja az aranymetszést, vagyis

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{QR}{PQ}.$$

A középkori művészetben a háromszög segítségével jött létre a legcsodálatosabb fejlődés, a festészetben megjelent a harmadik dimenzió (amelyről egy későbbi fejezetben szólnunk).



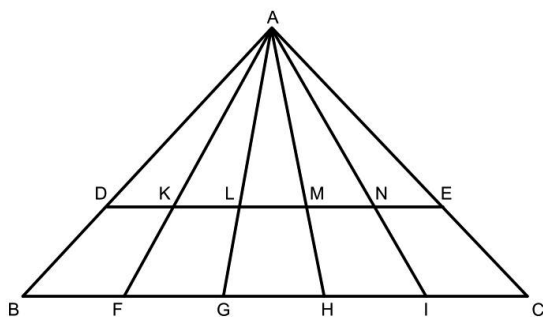
4.3. ábra Euklidesz optikai háromszögei

Ebben az esetben a vetítő-háromszög valóban a végtelenbe vezető út kapuja.

Euklideszt, az egyik legismertebb görög matematikust ma mindenütt a geometria atyjának fogadják el. Alexandriában élt i.e. 300 körül, amely akkoriban görög terület volt. Nem sokat tudunk az életéről, azonban sok műve maradt ránk. Legfőbb munkája az *Elemek* lényegében a geometria alapjait fogalmazza meg.

Egy másik művében, amelynek címe *Optika*, megállapított egy optikai zéruspontot, ahol a megfigyelő szeme helyezkedik el ( $O$ ). A két tárgy ( $AB$  és  $CD$ ) relatív méretét két derékszögű háromszög segítségével mérte meg, amelyek közös alapja  $OB$ , lásd a 4.3. ábrát. Minél nagyobb a szög az  $O$  pontban, a tárgy fizikailag annál közelebb helyezkedik el, vagy ha ugyanolyan távol vannak, akkor annál nagyobb a tárgy, minél nagyobb szög tartozik hozzá.

Piero Della Francesca, egy 15. századi neves olasz művész általánosította a projekciós háromszöget. Felismerte, hogy ha egy adott pontot egy több részre felosztott szakasz osztópontjaival összekötünk, akkor a szakasszal párhuzamos egyenesen ugyanolyan arányú osztáspontok keletkeznek, lásd 4.4. ábra.



4.4. ábra Piero vetítő háromszögei

Az A pont lett az „optikai végtelen”, más néven eltűnési pont. Ez hasonló, mint amikor egy egyenes úton állunk, és a messzeségbe tekintünk, úgy tűnik, mintha az út egyre keskenyebbé válna, amíg egy ponttá nem zsugorodik. Tudjuk, hogy ez csak vizuális jelenség, és az út mindenütt ugyanolyan széles. A művészeti alkalmazás Piero Della Francescának köszönhető.

Piero meghatározta a végtelenben lévő A pontot és a hozzánk legközelebb lévő BC szélességet. Megrajzolta a

$DE$  szakaszt, amely kijelölte a kép helyét, és az  $A$  pontot összekötötte a  $BC$  szakasz osztópontjaival ( $F, G, H, I$ ). A 4.4. ábrán látszik, hogy a  $K, L, M, N$  pontok vizuálisan korrekt arányos felosztást adnak a  $DE$  szakaszon. Festményein alkalmazta ezt a megoldást és hatalmas sikereket ért el, hamarosan számos követőre talált.

A háromszögnek egyszerűsége ellenére óriási hatása volt a geometriában, később a trigonometria segítségével hidat épített a geometriától az algebrához. Ez a következő fejezet témája.

## 5. fejezet

### A TRIGONOMETRIAI HÍD

Miután az elemi geometriában meghatározták a háromszögek sajátosságait, és felhasználták Pitagorász tételének legtöbb érdekes tulajdonságát, az ókori matematikusok figyelmét a derékszögű háromszögek szögeinek vizsgálata kötötte le. Az oldalak és szögek kapcsolatának mérése vezetett a matematikának ahhoz az ágához, amelyet ma trigonometriának nevezünk. Az elnevezés a görögből ered, és szabadon fordítva három szög mérését jelenti.

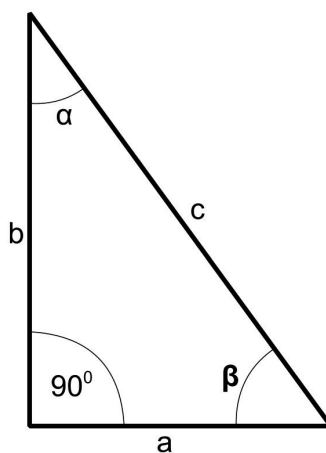
Az 5.1. ábrán egy derékszögű háromszögben a derékszög ( $90^\circ$ ) melletti oldalakat  $a$ -val és  $b$ -vel jelöljük, a derékszöggel szemközti oldalt, az átfogót  $c$ -vel. Az  $a$  oldallal szemközti szög elnevezése  $\alpha$ , a  $b$ -vel szemközti szögé pedig  $\beta$ .

Igen régen elvégezték a legegyszerűbb mérések definícióját. A derékszög melletti egyik oldal és az átfogó osztásával kapjuk:

$$\sin(\alpha) = a/c.$$

A másik befogó és az átfogó hányadosa:

$$\cos(\alpha) = b/c.$$



5.1. ábra A derékszögű háromszög

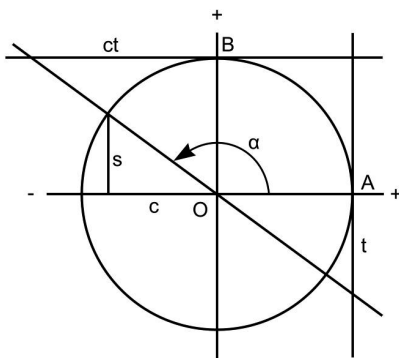
A befogók hányadosát nevezzük tangensnek, ez a két előző definícióból osztással könnyen kiszámítható. Erre az alapra megfelelően felépíthető volt az a bázisrendszer, amelyet ma az élet minden területén széleskörűen használnak, kezdve az egyszerű hétköznapi alkalmazásoktól a rendkívüli tudományos számításokig. Csak csodálni lehet messzemenő hatását, azt az általánosítást, amelyet ez a legegyszerűbb geometriai alakzat tett lehetővé. De olyan számításoknál is felhasználjuk, amelyeknek semmi köze a háromszögekhez. Mielőtt belekezdünk ezek vizsgálatába, szélesítsük ki az értelmezést.

Könnyen belátható, hogy a derékszögű háromszögben az egyik szög  $\sin$  függvénye a másik szög  $\cos$  függvénye, és megfordítva. Mivel a háromszög szögeinek összege  $180^\circ$  és a derékszögű háromszögben a legnagyobb szög  $90^\circ$  ezért a másik két szög összege is  $90^\circ$ . Egymás pótszögeinek nevezzük, és a következő összefüggések vonatkoznak rájuk:

$$\sin(\beta) = \sin(90 - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\cos(\beta) = \cos(90 - \alpha) = \sin(\alpha).$$

Eddig csak  $90$  foknál kisebb szögekre definiáltuk a függvényeket. Ez  $90$  foknál nagyobb szögekre is általánosítható azzal az előjel-megállapodással, amelyet az 5.2. ábrán mutatunk be. Itt  $s$  jelöli  $\sin(\alpha)$ -t,  $c$   $\cos(\alpha)$ -t és a kör egységsugarú.



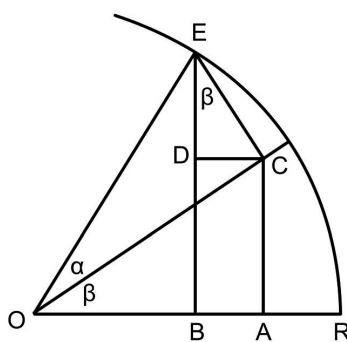
5.2. ábra A trigonometriai függvények általánosítása

Ebből a kiterjesztésből következnek azok a nagyon fontos trigonometriai azonosságok, amelyeket különféle alkalmazásokban felhasználunk. Kiegészítő szögnek nevezünk egy szöget és annak 180 fokból levont különbségét. Könnyen belátható, hogy egy, a koordináta-rendszer második negyedében lévő  $\alpha$  szög sinus értéke ugyanannyi, mint az első negyedben, az összefüggés:

$$\sin(180 - \alpha) = \sin(\alpha).$$

Mivel a kiegészítő szög cos értéke a negatív x tengelyen fekszik, csak előjelben különböznek:

$$\cos(180 - \alpha) = -\cos(\alpha).$$



5.3. ábra Dupla szögek trigonometriai függvényei

Végül az alapvető trigonometriai függvényeket többszörös szögekre is kiterjeszthetjük. Az 5.3. ábra alapján könnyen megállapíthatók két szög összegének és különbségének trigonometrikus függvényei. Feltéve, hogy egységsugarú körrel dolgozunk, egymás után felmérjük a vízszintes tengelyre a két szöget, így keletkezik az  $E$  pont. Az  $E$  pontból merőlegest állítva kapjuk a  $B$  pontot. Mérjük fel a  $\beta$  szöget erre a függőleges egyenesre úgy, hogy a szög csúcsa az  $E$  pontban legyen, ez az eredeti  $\beta$  szög szárát a  $C$  pontban metszi. A  $C$  ponton keresztül húzott vízszintes és az  $EB$  egyenes metszéspontja  $D$ .

Az előzőleg definiált elemi trigonometriai függvényeket alkalmazva az  $OAC$  és  $EDC$  háromszögekre kapjuk:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= BE = DE + AC = EC\cos(\beta) + OC\sin(\beta) = \\ &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$

Hasonló megfontolásokkal két szög összegére vonatkozó  $\cos$  értéket is meghatározhatjuk:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= OB = OA - CD = OC\cos(\beta) - EC\sin(\beta) = \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$

Ha adott egy szög, akkor a kétszeresére vonatkozó trigonometriai függvényeket is megkapjuk, ha a fenti szabályban  $\beta$ -t  $\alpha$ -val helyettesítjük:

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

és

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

Térjünk vissza az olyan alkalmazásokhoz, amelyek nem szükségszerűen kapcsolódnak a háromszögekhez. Ha a szögek összegére vonatkozó szabályban  $\beta$  helyett  $2\alpha$ -t írunk, megkapjuk a szög háromszorosára vonatkozó képletet, és így folytathatjuk tetszőleges  $n$ -szeres szögre. Ez vezetett ahhoz az értékes közelítő-módszerhez, amely a 19. század elején Fourier francia matematikus nevéhez fűződik: a periodikus függvények trigonometrikus approximációja.

Fourier politikus és matematikus volt egyszerre, valójában nemesember, báró. Napóleon egy időben kinevezte Alsó-Egyiptom kormányzójának. De hírnevét a matematikusok és mérnökök körében közelítő és transzformációs módszereinek köszönheti.

A Fourier-sor egy  $y = f(x)$  periodikus függvény közelítő értékét végtelen számú és egyre magasabb rendű  $\sin$  és  $\cos$  függvény összegével adja meg:

$$y = a_0 + a_1 \cos(\alpha) + b_1 \sin(\alpha) + a_2 \cos(2\alpha) + b_2 \sin(2\alpha) + \dots$$

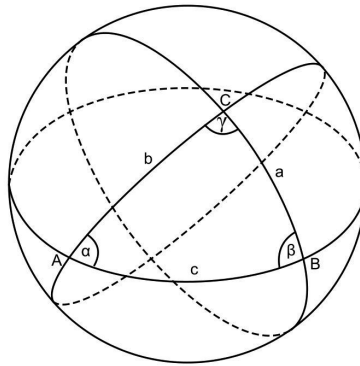
A függvénynek ez az alakja a harmonikus sor. A gyakorlatban bizonyos számú tag elegendő. Ennek a közelítő

módszernek az a kulcsa, hogy a függvény periodikus tulajdonságú legyen, azaz bizonyos része szabályosan ismétlődjön. Egy ilyen függvényt (újra) három mennyiség határoz meg: a függvény csúcserték konstans amplitúdója, az ismétlődő tulajdonság periódusa és a kezdő állapot. A periódus leírható egy bizonyos idő-intervallum ismétlődési frekvenciája segítségével is.

Sok fizikai jelenség ilyen tulajdonságú, és nem írható fel matematikailag zárt alakban függvényként, viszont Fourier-sorok segítségével jól megadható. Emiatt a trigonometria a mérnöki számítások egyik legfontosabb alapja.

A trigonometriát eddig síkháromszögekre vonatkozóan adtuk meg. Az elv kiterjeszthető bármilyen térbeli felületre, például a gömb felületére. Ezt gömbi trigonometriának nevezzük, és mivel Földünk egy hatalmas gömbnek tekinthető, óriási a jelentősége.

A gömbi főkör síkja áthalad a gömb középpontján. Például a Földön a hosszúsági körök (észak-dél) főkörök. A szélességi körök közül csak az Egyenlítő főkör. Három egymást metsző főkör a gömbön definiál egy gömbi háromszöget. Az 5.4. ábrán két hosszúsági kör és az Egyenlítő által meghatározott gömbháromszög látható.



5.4. ábra Gömbi háromszög

Intuitív módon látható, hogy a gömbháromszög szögeinek összege több mint 180 fok. A 180 fok feletti részmennyiséget gömbi feleslegnek nevezzük. Ez igen jelentős is lehet, például ha azt az esetet tekintjük, amikor az  $AC$  oldal a 90. hosszúsági kör, a  $BC$  oldal a 0. hosszúsági kör (Greenwich) és az  $A, B$  csúcsok az Egyenlítőn, míg a  $C$  csúcs az Északi-sarkon helyezkedik el. Mindhárom szög 90 fokos, így az összegük 270 fok, amely 90 fokos gömbi felesleget jelent.

A gömbön derékszögű háromszög is értelmezhető. Ha az egyik oldal az Egyenlítőn, a másik oldal egy hosszúsági körön található, metszéspontjuknál derékszög keletkezik. A harmadik oldal legyen egy olyan főkörön,

amely nem hosszúsági kör, és végtelen sok ilyen van, így gömbi derékszögű háromszöget kapunk.

Végül minden, a síkban érvényes trigonometriai összefüggés definiálható a gömbháromszögben, ebből az általánosításból egész sor számítási lehetőség származik. Ahhoz, hogy leírjuk egyedülálló természeti tulajdonságokkal rendelkező Földünk közvetlen környezetét az ember alkotta műholdakkal együtt – a trigonometria hozzájárulása felbecsülhetetlen.

A gyakorlati trigonometria elterjedt már az egészen régi idők óta. Archimédész (i. e. 287-212) a híres, gyakorlati trigonometriával is foglalkozó tudós Sziciliában született, amely akkoriban görög terület volt, Szirakúza városában és ott is halt meg. Életrajzát pontosan ismerjük, mivel széles körben elismerték már életében is. Sok leírásban részletesen szerepel hősiessége, amikor szülővárosát védte az erőszakkal betolakodó rómaiakkal szemben. Többek között nagy távolságból működő kőhajító gépeket szerkesztett, kétségtelen, hogy ez volt a ballisztika tudományának kezdete. Tulajdonképpen egy római katona ölte meg, miközben egy matematikai probléma megoldásához rajzolt a homokba. Néhány történeti feljegyzés szerint utolsó szavai ezek voltak:

„Ne zavarjátok köreimet”.

Minden idők egyik legnagyobb matematikusának tartjuk, minden bizonnyal megelőzte korát. Elsőként

alkalmazta a trigonometriát gyakorlati problémák megoldására, ezért a legelső alkalmazott matematikusnak tekinthető. Például hogy a katapultált kő egy bizonyos távolságból eltaláljon egy hajót – trigonometriai számításokat használt fel. Elsőnek végzett közelítő számításokat tört-approximációval bizonyos szögekhez szükséges alapvető számok meghatározásához. Például

$$\sin(60) = \sqrt{3} / 2$$

értékéhez a

$$265 / 153 < \sqrt{3} < 1351 / 780$$

approximációt használta.

Ez ma is a hármas szám négyzetgyökének egy meglepően jó közelítése, és hasznos a mindennapokban. Még ennél is fontosabb, hogy alsó és felső határoló számokat vezetett be, amely gyakorlati hibabecslést tesz lehetővé; egy olyan fogalmat használt, amely messze előremutat saját korán.

Végül nézzük meg ismét az 5.3. ábrát, és tekintsük az  $OBE$  derékszögű háromszöget. Pitagorász tételét alkalmazva kapjuk:

$$OB^2 + BE^2 = OE^2.$$

Mivel az  $OE$  átfogó hossza 1 egység, alkalmazva a  $\sin$  és  $\cos$  függvényt az  $x = \alpha + \beta$  szögre a nevezetes pitagorászi azonosságot kapjuk:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Ez az azonosság számos lehetőséget nyújt arra, hogy a trigonometriai függvényeket egymás segítségével kifejezzük, hogy algebrai egyenleteket és integrálokat trigonometriai helyettesítésekkel oldjunk meg. E témák kívül esnek vizsgálódásaink tárgyán, de tanúsítják az egyszerű hármasszám és annak geometriai megjelenése: a háromszög kisugárzó erejét.

## 6. fejezet

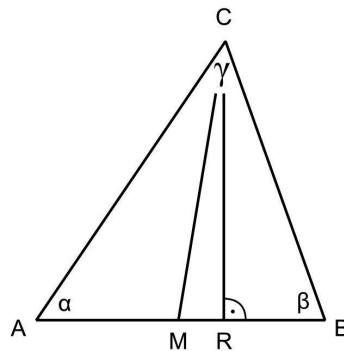
# HÁROMSZÖGELÉS ÉS HÁROMSZÖGESÍTÉS

A háromszögek egyik hasznos alkalmazását nevezzük háromszögelési módszernek. Az egyik háromszögelési módszer célja, hogy távoli tárgyak méréssel nem meghatározható távolságát megállapítsuk a trigonometria segítségével, bizonyos szögek ismerete alapján.

Az egyik legelső kísérletet, amikor háromszögek segítségével lett meghatározva tárgyak megmérhetetlen távolsága, a görög Tálész végezte az i. e. 6. században. Miletos városában élt, amely ma Törökországhoz tartozik, de annak idején görög terület volt. Tálészt főként, mint filozófust ismerték, aki bizonyos érdeklődést mutatott a geometria és a csillagászat iránt. Néhány írásos emlék szerint megjósolt egy napfogyatkozást, amely be is következett még életében.

Tálész legismertebb tétele olyan háromszögekre vonatkozik, amelyek egyik oldala egy kör átmérője. Ha az ilyen háromszögek harmadik csúcsa a kör kerületén fekszik, akkor ezek derékszögű háromszögek, és

a derékszög a körvonalon elhelyezkedő csúcsnál található. Megkísérelte azt is, hogy hasonló háromszögek segítségével kiszámítsa a Kheopsz-piramis magasságát. Megmérte a talajon a piramis árnyékának hosszát abban a pillanatban, amikor saját árnyékát és testmagasságát egyenlőnek mérte. A piramis magasságának közelítő mérése meglepően pontos volt.



6.1. ábra Háromszögelés

Az első, valóban háromszögelési módszernek tekinthető vállalkozások megvalósítói közül az i. e. 3. században egy másik görög, Aristarchos tűnik ki. Ő is Samos szigetén született, mint Pitagorász, csak néhány évszázaddal később.

A mediterrán vidéken abban a korszakban a tudás és tehetség valóban ámulatba ejtően gazdag. Aristarchos,

akiről egy krátert neveztek el a Holdon, az elsők között vetette fel a heliocentrikus naprendszer modelljét.

Megkísérelte a Nap és a Föld távolságot megadni: az egyik szöget mérte meg a Föld-Nap-Hold által meghatározott derékszögű háromszögben, ahol a derékszögű csúcs a Hold. Valóban, *A Nap és a Hold méretéről és távolságáról* című írása az évezredek során napjainkig fennmaradt. Azt az időpontot választotta ki, amikor a Nap sugarai pontosan a Hold felét világítják meg. Eredményei meglehetősen durvák, mert mérési technikái pontatlanok voltak, és a mérni kívánt szög majdnem 90 fok, azonban bemutatta a csillagászati mérések lehetőségét.

Ha a derékszögű háromszögben definiált trigonometriai függvényeket kiterjesztjük általános háromszögekre, az ún. szinusz-törvényt és más hasonló összefüggéseket kapunk. A 6.1. ábra jelöléseivel:

$$\sin(\alpha) / \sin(\beta) = BC / AC.$$

Tegyük fel, hogy két megfigyelő helyezkedik el az  $A$  és a  $B$  pontban, és az  $AB$  távolságot ismerjük. Mindketten megméri a célpont ( $C$ ) és a másik megfigyelési pont közötti szöget, ezek  $\alpha$  és  $\beta$ . Azonban a cél az, hogy meghatározzák a  $C$  pont és az  $AB$  egyenes közötti távolságot, de valamilyen akadály, például egy közöttük lévő folyó lehetetlenné teszi a közvetlen mérést. Vagyis meg kell találni az  $AB$  egyenesen az  $R$  pontot, és ez általában nem

esik egybe az  $M$  felezőponttal, csak rendkívül szerencsés esetben. A távolságot az  $RC$  szakasz adja. A fenti szinusz-törvényből következik:

$$\sin(\beta) / AC = \sin(\gamma) / AB.$$

Az eredeti háromszöget két derékszögű háromszögre bontva a  $\sin$ -függvény egyszerű alkalmazásával:

$$RC = AC \cdot \sin(\alpha)$$

és

$$RC = BC \cdot \sin(\beta).$$

A szinusz-törvénybe helyettesítve kapjuk:

$$RC = AB \cdot \sin(\alpha) \sin(\beta) / \sin(\gamma).$$

A  $\gamma$  szöget nem ismerjük, de mivel a háromszög szögeinek összege 180 fok, ezért

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta).$$

Korábban láttuk a kiegészítő szögekre vonatkozó trigonometriai összefüggést, eszerint

$$\sin(\gamma) = \sin(\alpha + \beta),$$

így a távolság:

$$RC = AB \cdot \sin(\alpha) \sin(\beta) / \sin(\alpha + \beta).$$

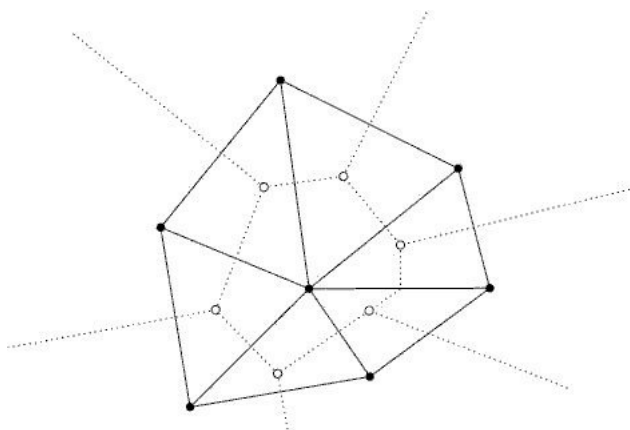
Most a jobboldalon szereplő minden adatot méréssel meghatározhatunk és így kiszámíthatjuk a közvetlenül nem mérhető távolságot. Ehhez három adatot kell ismernünk, két szöget és egy távolságot.

A háromszögelési módszer abban az esetben is hasznos, ha nemcsak egy harmadik pont távolságát, hanem két, nem megközelíthető pont közötti távolságot keressük. Például ez a helyzet adódhat, amikor egy földmérő két olyan pont közötti távolságot mér, amelyeket egy folyó választ el egymástól.

Ez a négy pontos háromszögelés megvalósítható csupán két megközelíthető pont közötti távolság és az ezekből mérhető négy szög segítségével. A szögek közül kettő az ismert pontokból a két távoli pont látószöge. A két másik szöget az ismert pontok és egy-egy ismeretlen pont által alkotott háromszögekből kaphatjuk meg.

Szabálytalan geometriai területek felosztásánál egy másik háromszögelési eljárást alkalmazunk. Ez a módszer Voronoj ukrán matematikus elvén alapul, amelyet a 20. század elején publikált, és elnevezése ma Voronoj-poligonok.

A síkon egy ponthalmaz bizonyos pontjához rendeljük hozzá azt a poligont, amely mindazokat a pontokat tartalmazza, amelyek közelebb vannak a kiválasztott ponthoz, mint a halmaz bármely más pontjához.



6.2. ábra Delaunay háromszögelés

A 6.2. ábrán a feketével jelölt pontok ábrázolnak egy ilyen halmazt. A középben egy pontot tartalmazó (pontozott vonallal jelölt) szabálytalan hatszög a középső ponthoz tartozó Voronoi-poligon. Könnyen belátható, hogy a poligon belső pontjai közelebb vannak a középponthez, mint a halmaz bármely más pontjához.

A halmaz összes pontjához tartozó Voronoi-poligonok egyesítése teljesen lefedi a síkot, ez azt is jelenti,

hogy a halmazban bármely két ponthoz tartozó Voronj-poligonnak nincs közös belső pontja, legfeljebb a határoló szakaszon lehetnek közös pontok.

A Voronj-elv általánosítását egyik tanítványa, Delaunay (mint a neve is utal rá, francia őstől származott, de orosz volt) publikálta az 1930-as években, és az ő módszerét ma Delaunay háromszögelésnek nevezzük. A módszer a Voronj-poligonokon alapul, és azon pontokat összekötő éleket szerkesztjük meg, amelyekhez tartozó Voronj-poligonoknak van közös oldala. Az összes lehetséges ilyen oldal megszerkesztése után háromszögletű területekkel, az ún. Delaunay háromszögekkel fedtük le a számunkra fontos sík területet.

A 6.2. ábrán hat Delaunay háromszög fedi le a síkot, a pontozott vonalak a Voronj-poligonok élei, a folytonos vonalak pedig a Delaunay háromszögek oldalait ábrázolják.

E módszer segítségével szabálytalan geometriai alakzatok lefedhetők háromszögekkel, és ezáltal az adott területen előforduló bármely fizikai jelenség leírható. A háromszög, habár a legegyszerűbb geometriai alakzat, hatalmas jelentőséget kapott életünkben, de sajátos szerepe nem ér véget a geometriával: bizonyos algebrai műveletekben nagyon előnyös a háromszögesítés fogalma.

A lineáris egyenletrendszerek megoldásával évezredek óta foglalkozik a matematika. Ha két ismeretlenünk és két egyenletünk van, a rutinszerű szimultán megoldás már a középkorban ismert volt. Ma pedig az

$$\begin{aligned}ax+by &=c \\ dx+ey &=f\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldási módszere a középiskolai matematika alapvető témája. Ha az egyik egyenletet egy megfelelően választott számmal megszorozzuk, majd összeadjuk a két egyenletet, akkor egy egy-ismeretlenes egyenletet kapunk. A módszer több ismeretlenes egyenletrendszer esetében is alkalmazható, de ha a gimnáziumban egy három ismeretlenes egyenletrendszer megoldása volt a házi feladat, mindnyájan feladtuk. Ha az ismeretlenek száma még több, akkor fokozottan nehéz végrehajtani a módszert.

Gauss, a matematika óriási géniusza oldotta meg ezt a feladatot, ezért szenteljünk néhány szót az életrajzának. Johann Gauss 1777-ben Braunschweigben született, ez ma Németország területén fekszik. Már az elemi iskolában csodagyereknek számított. 21 éves korában fejezte be *Disquisitiones Arithmeticae* című művét, és vitathatatlan, hogy minden idők egyik legsokoldalúbb matematikusa volt. A matematika szinte minden területén alkotott: a számelméletben (prímszám-tétel), az analízisben (az algebra alaptétele), a statisztikában

(legkisebb négyzetek), a differenciálgeometriában (a Gauss-görbület) és így tovább.

Gauss olyan háromszögesítési módszert vezetett be, amely könnyen megoldható alakra hozza az egyenletrendszert. Ez ma Gauss eliminációs módszerként ismert, mivel a háromszögesítést úgy valósítja meg, hogy az egyenletrendszer nem-nulla együtthatóinak egy részét szisztematikusan eliminálja.

Az egyszerűség kedvéért csak három egyenlet megoldására vizsgáljuk a módszert, de mindez alkalmazható akár milliányi egyenlet esetében is.

Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Gauss óriási ötlete az volt, hogy a folyamat során az általános rendszert – egy középkori elgondolás szerint – úgy egyszerűsítse, hogy egy háromszög alakú rendszer keletkezzen. Javaslatára szerint az egyenleteket sorra be kell szorozni, és egymással összeadni mindaddig, amíg az egyenletrendszer alakja háromszög nem lesz:

$$\bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \bar{a}_{13}x_3 = \bar{b}_1$$

$$\bar{a}_{22}x_2 + \bar{a}_{23}x_3 = \bar{b}_2$$

$$\bar{a}_{33}x_3 = \bar{b}_3$$

Természetesen az egyenletrendszer együtthatói megváltoznak a háromszögesítési folyamat során, ezt felülvonással jelöltük, de a végeredmény látványosan egyszerűsödik. A háromszög alakú egyenletrendszer ún. visszahelyettesítéssel oldható meg, ez az elnevezés tükrözi azt, hogy fordított sorrendben kapjuk a megoldásokat. Legelőször az utolsó egyenlet megoldása:

$$x_3 = \bar{b}_3 / \bar{a}_{33} .$$

Majd az utolsó előtti egyenletbe a már ismert módszerrel visszahelyettesítjük  $x_3$  értékét, így

$$x_2 = (\bar{b}_2 - \bar{a}_{23}x_3) / \bar{a}_{22} .$$

Ezt az eljárást ismételjük mindaddig, amíg a legelső egyenlet megoldásához minden tagot kiszámítottunk:

$$x_1 = (\bar{b}_1 - \bar{a}_{12}x_2 - \bar{a}_{13}x_3) / \bar{a}_{11} .$$

A háromszögesítés és az azt követő visszahelyettesítési módszer általánosítható több ismeretlen esetére, mert a háromszög alak a végtelenségig fenntartható.

Nyilvánvalóvá akkor válik a szisztematikus eljárás valódi jelentősége, ha figyelembe vesszük, hogy számítógéppel akár millió egyenletből álló igen nagy egyenletrendszer is feldolgozható. A folyamat számítógépes megvalósításra nagyon alkalmas. Az ismétlődő számítási minták rekurzív végrehajtása az embernek rendkívül fárasztó, viszont éppen ez a számítógép erőssége.

Az ilyen hatalmas rendszerek együttthatóit néhány mechanikai szerkezet, repülőgép, autó vagy hajó fizikai viselkedésének leírására használják. A rendszer jobb oldalán álló mennyiségek a tárgyra ható bizonyos fizikai terhelést írják le, a természeti erőket, az úton fellépő vibrációkat, vagy az óceán hullámait. Újabb bizonyíték, hogy a hármas szám geometriai hírnöke, az egyszerű háromszög mennyire célszerű a gyakorlatban.

## 7. fejezet

### HÁROMDIMENZIÓS UNIVERZUM

Amennyire érzékeljük, világunk háromdimenziós. Jól megmutatkozik az univerzum (legalábbis geometriai értelemben) háromdimenziós természete, amikor a Naprendszer más bolygóra küldött csillagközi szondákat irányítjuk. Biztosan nem jutnának célba olyan földi eszközzel, mint az északi mágnességen alapuló iránytű. Az űrbeli pontokat olyan háromdimenziós koordináta-rendszerben jelöljük ki, amelyben a Földnek kitüntetett szerepe van.

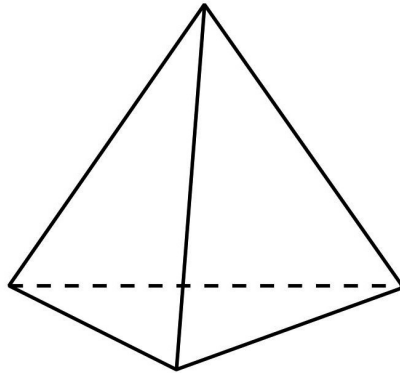
E koordináta-rendszer origója a Föld, „vízszintes” síkját az egyenlítői főkör síkja definiálja. A sík meghatározásánál kiküszöböljük a Föld tengelyének ingadozását, és ennek hatását a síkra.

A koordináta-rendszer függőleges tengelyét a tavasz első napján a Föld és a Nap által meghatározott egyenes definiálja. Egy referencia-időpontot is megadunk – ez 2000. január 1. – azért, hogy számolni lehessen azokkal a változásokkal, amelyeket a Naprendszer más bolygóinak gravitációs hatása okoz.

Bármely űrhajó helyzete pontosan megállapítható ebben a koordináta-rendszerben, leggyakrabban két szöget felhasználó csillagászati módszerrel. Ezek a szögek: a „vízszintes” síkban mért eltérés a merőlegetől, az azimut, és a deklináció, vagyis a sík alatti vagy fölötti szög. Ha lemérjük az űrhajó távolságát is, három adatot nyerünk (két szöget és egy távolságot), amely a szférikus koordináta-rendszert alkotja. Ezzel a három mennyiségen alapuló rendszerrel nemcsak a Naprendszeren belül, hanem a galaxisban is megvalósítható a helymeghatározás.

A háromdimenziós tárgyak közül az ókorban először a különféle poliédereket vizsgálták, amelyeket az élek és a csúcok által definiált síkidomok határolnak. A 7.1. ábrán a történetileg legkorábbi és legfontosabb test, a tetraéder látható. Ez valóban az alapvető síkbeli építőkö, a háromszög térbeli kiterjesztése. Mind a négy lapja háromszög és gyakorlati jelentőségére később derül fény.

A háromdimenziós geometriai testek speciális osztályát alkotják a szabályos poliéderek, felépítésükben a 3 kitüntetett szerepet kap. A szabályos testek minden határoló-lapja egyenlő oldalú és szögű szabályos sokszög. Platónak, az i.e. 5. században élt görög filozófus után „platói testeknek” is nevezik őket.

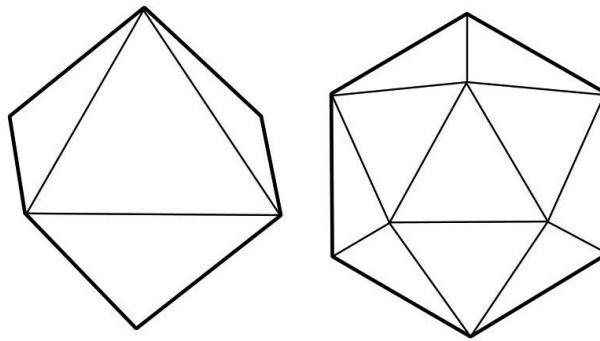


7.1. ábra Tetraéder

Plató születési helyét nem ismerjük, de feltételezzük, hogy Athénban, vagy a közelében élt. Nemesi családban kiváltságos nevelésben és kiváló oktatásban részesült. Megalapította az Athéni Akadémiát, egyik tanítványa a korábban már említett Arisztotelész volt. Filozófiai művei jóval ismertebbek, mint matematikai tárgyú munkái, de mivel érdeklődését felkeltették és osztályokba sorolta a szabályos testeket, így róla nevezték el azokat.

Öt szabályos poliéder létezik: tetraéder, hexaéder, oktaéder, a dodekaéder, amelynek 12 lapja van, és a 20 lappal rendelkező ikozaéder. Három olyan szabályos test van, a tetraéder, az oktaéder és az ikozaéder – e két utóbbi a 7.2. ábrán látható – melyek lapjai

háromszögek. Az oktaéder lapjait, ahogy neve is jelzi, 8 egybevágó háromszög alkotja. Az ikozaéder a legbonyolultabb, de különösen szép szabályos test 20 háromszögből épül fel.



7.2. ábra Oktaéder és ikozaéder

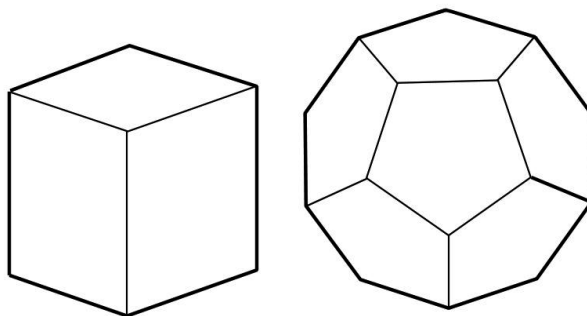
A 7.1. ábrán látható tetraéder és a 7.3. ábrán lévő hexaéder és dodekaéder csúcsaiban három él találkozik. A hexaéder 6 lapja egy-egy négyzet, a dodekaéder pedig 12 ötszögből áll.

A szabályos testeket különös hiedelmek övezték. Egyesek úgy vélték, hogy az öt szabályos test az univerzum leképezése. A külső réteg egy tetraéder, benne egy kocka, a kockán belül egy oktaéder, amely dodekaédert foglal magába. Legbelül a mind közül legbonyolultabb test, az ikozaéder jelképezi a mi világunkat.

A háromdimenziós geometriai világ algebrai megjelenítése az ismerős Descartes-féle koordináta-rendszerben lehetséges, ahol minden pontot három koordináta határoz meg:

$$P = (x, y, z).$$

Ezt a rendkívül kényelmes ábrázolást a francia Descartes-nak, a 17. században élt francia matematikusnak és filozófusnak köszönhetjük, akinek szállóigévé vált mondása: „cogito, ergo sum”.



7.3. ábra Hexaéder és dodekaéder

Ez a rendszer lehetővé teszi, hogy bonyolult háromdimenziós alakzatokat egyszerű algebrai formában fejezzünk ki, ez az analitikus geometria.

A kétdimenziós sík világok ideje régen lejárt. Már az űrben lévő objektumokkal foglalkozunk. A háromdimenziós világűrben is igaz, hogy bármely két pont meghatároz egy egyenest. Pitagorasz tételének háromdimenziós általánosítása adja két pont távolságát:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Továbbá, bármely három pont definiál egy síkot: a három pont közül 2-2 pontot összekötő három egyenes, vagyis egy háromszög által. Még tovább menve, négy olyan pont a háromdimenziós térben, amelyek nem esnek egy síkba, meghatároz három különböző síkot, és az általuk közrefogott alakzatot négy háromszög, azaz egy tetraéder határolja. Mivel a háromszögek kitöltik a kétdimenziós szabálytalan geometriai alakzatok területét, a tetraéder alkalmas arra, hogy háromdimenziós testek térfogatát töltsse ki.

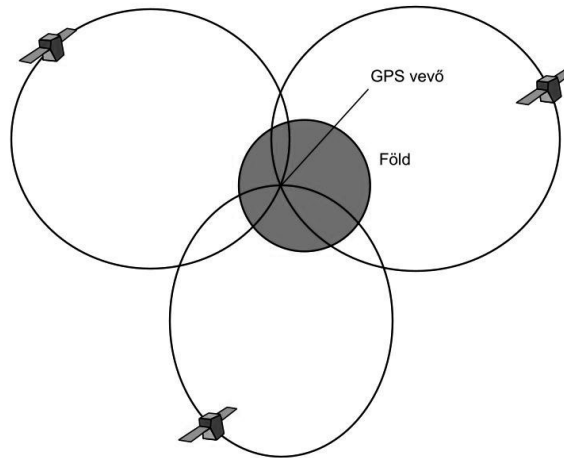
A trigonometriát, amelynek erősségeit az 5. fejezetben részleteztük, általánosíthatjuk három dimenzióra. Ha megőrizzük a háromszögek síkbeli alakját, de megengedjük, hogy a háromdimenziós koordináta-rendszerben különböző háromszögek más-más síkokban helyezkedjenek el, a lehetőségek gazdag tárházát kapjuk.

A 6. fejezetben bemutatott, távolságok meghatározására szolgáló egyszerű háromszögelési módszer ilyen módon könnyen általánosítható, és a csillagászok széles

körben használják: mérhető szögek és ismert távolságok alapján a nagyon távoli objektumok távolságának és méretének megállapítására. Ez a módszer különösen rekurzív módon hatékony. Ha már ismerjük egy megközelíthetetlen pont távolságát – és a legtöbb égi pont elérhetetlen számunkra – ebből az ismert távolságból kiindulva további háromszögeléseket végezhetünk.

A GPS (global positioning system = általános helyzetmeghatározó rendszer) készülék is egy háromdimenziós háromszögelési feladatot végez, amikor három különböző helyzetű, ismert égi pont segítségével megállapítja egy pont helyét –lásd 7.4. ábra. Elektromágneses jelek közvetítésével leméri a vevőállomás és a három, Föld körüli pályán lévő műhold közötti távolságot.

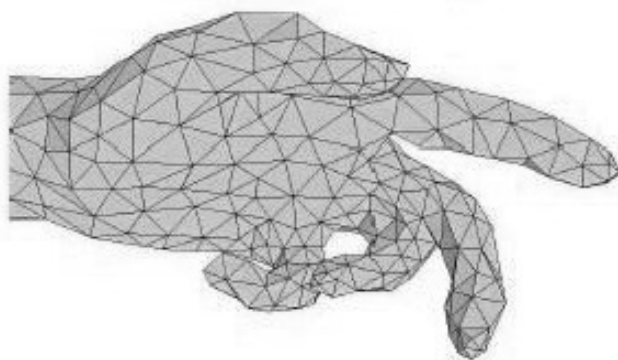
A műholdak – egymástól és a vevőállomástól mért távolsága által definiált – relatív helyzete lehetővé teszi, hogy extrém pontossággal meghatározzuk a Földön lévő vevőállomás pozícióját. Mindehhez csak egy kis trigonometria kell. Az elv háromnál kevesebb műhold esetén nem működik, de háromnál több sem szükséges. Újra megjelent a mágikus hármas szám.



7.4. ábra GPS háromszögelés

Az előző fejezetben bemutatott, szabálytalan területek lefedésére alkalmazott másik háromszögelési módszert is általánosíthatjuk három dimenzióra, ez a Delaunay-tesszelláció. Három dimenzióban a Voronoi-poligon olyan poliéder, amelynek minden pontja közelebb fekszik egy térbeli ponthoz. Mivel a térben minden pontot négy ilyen poliéder vesz körül, a Delaunay-háromszög tetraéderré válik. A folyamat végeredménye, hogy egy háromdimenziós tárgy belseje tetraéderekből építhető fel, és a felületét háromszögek határolják (a tetraéderek lapjai).

A szabálytalan háromdimenziós testek tesszellációs eljárását széles körben alkalmazza a tudomány: a fizikától a biológiáig. Még a szabálytalan alakú objektumnak tekinthető emberi testrészek is felépíthetők tetraéderekből a tesszellációs módszer alapján. Egy példa a 7. 5. ábrán: az emberi kéz modellje tetraéderekre bontva. A folyamat végén a kéz külső felületét háromszögek borítják. A durva felbontás miatt a felszín kissé érdesnek tűnik, de további finomításokkal ez könnyen megszüntethető.



7. 5. ábra Egy kéz tesszellációs felbontása

A számítógépes grafika a számítógépes játékokban és a filmiparban használja fel azt, hogy a tesszellációs felbontású testek külső felszínét háromszögek fedik le. Bár egy tárgy pontosabb módszerrel is leírható, a háromszögletű síkfelületek megjelenítési sebessége sokkal gyorsabb, mint a pontos geometriai ábrázolásé,

ezért vonzó ez a technika. Ha elég nagyszámú tetraédert használunk fel, és ennek megfelelően a felületi háromszögek is egyre kisebbek, akkor a képpalkotás elég pontos, de ha szükséges, akkor a tetraéderek és a hozzátartozó háromszögek mérete tovább finomítható úgy, hogy az emberi szem számára elfogadható legyen.

Hogy az igazsághoz híven beszéljünk az univerzum dimenzióiról, Minkowski nevét is meg kell említenünk. Az orosz birodalomban, a mai Litvánia területén született a 19. század második felében. Matematikai munkásságát főleg Németországban és Svájcban fejtette ki. Mialatt Svájcban dolgozott, rövid ideig Einstein is a tanítványai közé tartozott, így munkáik örökre összekapcsolódnak. Minkowski egy négydimenziós fizikai tér gondolatát vetette fel, a három geometriai dimenziót az idővel, mint negyedik dimenzióval egészítette ki.

A térben két pont közötti távolság definíciója:

$$d^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2,$$

ahol  $t$  az időt,  $c$  pedig a fénysebességet jelöli. Bizonyos értelemben a fejezet elején bemutatott, a Földön kívüli tárgyak leírását szolgáló háromdimenziós szférikus rendszerben is megtalálható egy rejtett idő-tényező, amikor a rendszer „függőleges” tengelyének meghatározásakor bevezettük a referencia-dátumot. Úgy tűnik, ha egyszer kilépünk a földi világból, akkor a négydimenziós térbe kerülünk.

Minkowski négydimenziós tér-elképzelése a 20. század első évtizedében jelent meg, és tökéletesen beleillett Einstein speciális relativitáselméletébe, valójában megoldva annak néhány matematikai nehézségét. A fizikai univerzum, mint relativisztikus tér-idő kontinuum megfogalmazást a tudósok széles körben jó megoldásnak fogadják el a csillagászati távolságok leírására. Napjaink egyik nagy kihívása, hogy ezt az elméletet és az atomfizikában a részecskék világát összeegyeztessük egymással.

Léteznek új, néha kissé ezoterikus elméletek, mint a húrelmélet. E szerint az univerzum 11 dimenziós, amelyben a húrok feltehetően élnek és megadják létezésünk alapjait. Feltételezik, hogy a húr egydimenziós objektum a 11 dimenziós térben, leginkább egy görbére hasonlít a mi három dimenzióinkban.

Azután léteznek közbülső, egynél több, de tizenegynél kisebb dimenziós tárgyak, melyek elnevezése 2, 3, 4, ...-bránok. Leginkább a mi háromdimenziós világunkban lévő kétdimenziós membránokhoz hasonlóak (innen ered a nevük). Sokan támadják a rejtélyes elméletet, amelynek bizonyítása egyáltalán nincs.

Nyíltan el kell ismernünk, hogy minden, amit eddig elértünk a három dimenzió túl: egy bátortalan lépés az időbe, a hármas szám kapu-szerepének újabb bizonyítéka.

## 8. fejezet

### A HÁROM, MINT PRÍMSZÁM ÉS TOVÁBBI KUTATÁSOK

A hármas szám egy kitüntetett számcsoporthoz tartozik, a prímszámok tagja.

A prímszám csak eggyel és önmagával osztható – és valamiképpen talányos. Még nem ismerjük azt a szabályt, ahogyan e számok sorozata létrehozható, és nem tudjuk leírni a számegyenesen való eloszlásukat sem. A három rendkívüli helyet foglal el a prímszámok sorozatának elején.

A három a legelső szabályszerű prím, és páratlan, ahogyan a kettőt kivéve az összes többi prímszám is. A kettőn kívül nincs páros prímszám, mivel minden más páros szám osztható kettővel, így nem lehet prím. Egyesek szabálytalan prímnek tekintik az egyet és a kettőt. Mások egyáltalán nem tartják prímnek az egyet, bár betű szerint kielégíti a definíciót.

Minden más számot, amelyik nem prímszám, összetett számnak nevezünk, mivel egytől és önmagától különböző szorzótényezőkre bontható. Például a 4

az első összetett szám: felírható  $1 \cdot 4$  vagy  $4 \cdot 1$  szorzataként, másrészt úgy is, mint  $2 \cdot 2$  – ez olyan tényezőkre bontás, amely kizárja, hogy prím lehessen.

Ezért a prímszámok a számok világának végső építőkövei. Minden szám, amelyik nem prím, felépíthető prímszámok szorzataként, de a prímek nem bonthatók más számokra. Oszthatatlanok.

Legelőször Euklidesznél, i. e. 300 körül találkozunk prímszámokkal. Sőt, Euklidesz bebizonyította, hogy végtelen számú prím létezik, és ezzel talán a legizgalmasabb találós kérdést tette fel: egyidejűleg a számegyenesen több olyan számhalmaz van, amelyek mindegyike végtelen sok elemből áll. Ezt a rejtvényt végül csak a 19. század végén oldotta meg az orosz születésű német matematikus Cantor, híres számolási alapelve segítségével, amely egy későbbi fejezet témája.

Euklidesz szellemes bizonyítása elvileg elég egyszerű. Azt állította: tegyük fel, hogy a prímek száma véges. Ebben az esetben minden prímszámot összegyűjthetünk és összesorozhatjuk őket egymással. Ezután a szorzathoz adjunk hozzá egyet, ekkor két lehetőség van: vagy egy új prímszámot kaptunk, vagy egy összetett számot. Ha ez egy prím, akkor az eredeti halmaz nyilván nem tartalmazta az összes prímszámot, és helytelen az a kiindulási feltételezés, hogy a prímek száma véges.

Másrészt, ha az így kapott új szám összetett, akkor kell legyen olyan szorzótényezője, amely nem szerepelt a prímszámok eredeti halmazában. Ezért a véges számú felsorolt prímszámon kívül léteznie kell még más prímnek. Világos, hogy mindkét eset azt mutatja, hogy a prímek száma végtelen, mivel mindig elő tudunk állítani egy újabb prímet, tekintet nélkül arra, hogy mekkora a halmaz.

Az előző gondolatmenetből az is következik, hogy végtelen sok összetett szám van. Végtére a fenti módon keletkező minden egyes új prímszám segítségével végtelen sok új összetett szám állítható elő. Könnyen belátható, hogy minden egyes prímszámmal, – például a kedvenc hárommal – végtelen sok új összetett szám képezhető:  $3 \cdot 3 = 9$ ,  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ ,  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ , ...,  $3 \cdot 3 \dots \cdot 3 = 3^k$ , ahol  $k$  megmutatja, hányszor vettük szorzótényezőnek a hármat. Ez végtelen sokszor elvégezhető, ezért minden egyes új prímszám végtelen számú új összetett számot generál.

A prímszámok egyszerű definíciója alapján azt lehetjük, hogy könnyen létrehozhatók. Az biztos, hogy Eratoszthenész görög matematikus i.e. 200 körül kitalált egy módszert a prímszámok kikeresésére. Eratoszthenész Alexandriában élt, mint Euklidesz, csak 75 évvel később. Kísérletet tett arra, hogy meghatározza a Föld méretét, igen ambiciózus cselekedet, figyelembe véve a rendelkezésére álló időt és eszközöket. A prímszámok

kiválasztási módszere nagyon egyszerű, de rendkívül fárasztó, mivel azon alapul, hogy egy bizonyos számot kiválasztva az összes nála kisebb számot felsoroljuk, és a már megtalált prímek többszöröseit végig kihúzzuk. A módszer neve Eratoszthenész szitája, és úgy működik, hogy minden második számot kiejti a 2 után, minden harmadik számot a 3 után, minden ötödiket az 5 után, stb.

Például a 15-nél kisebb prímek keresése:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15  
 1, 2, 3, x, 5, x, 7, x, 9, x, 11, x, 13, x, 15  
 1, 2, 3, x, 5, x, 7, x, x, x, 11, x, 13, x, x

A módszer következő lépése, hogy minden ötödik számot kellene kirosszalni, de 10 már kiesett, mivel a 2 többszöröse, és 15 is kiesett, mivel a 3 többszöröse.

Amikor minden hetedik számot húznánk át, 14 már kiesett, mivel a 2 többszöröse. Így az utolsó megmaradó szám a 11, ezt követően 22 esne ki, de ez már kívül esik a vizsgált tartományon, ezért a folyamat véget ért. A prímszámok 1 és 15 között: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Az első néhány prím alakja is érdekes sémát követ:

$$2^2 - 1 = 3, \quad 2^2 + 1 = 5$$

mindkettő prím, de

$$2^3 - 1 = 7, \quad 2^3 + 1 = 9$$

közül csak az egyik prím, a másik összetett szám.  
Majd

$$2^4 - 1 = 15, \quad 2^4 + 1 = 17$$

az első összetett szám, a második prím. Mint a példából is látható, a  $2^k \pm 1$  alak néhány esetben prímszámot ad, de nem mindig.

A 17. században Fermat, egy francia amatőr matematikus, aki egyébként ügyvédnek tanult, megsejtette, hogy ha a kitevőben 2-hatvány szerepel, akkor a kapott számok prímek. Manapság Fermat-számoknak nevezzük a

$$2^{2^n} + 1$$

alakú számokat. Az első Fermat-szám a 3, mivel  $3 = 2^2 + 1$  és prímszám is. Azonban Fermat sejtésével ellentétben nem minden Fermat-szám prímszám.

Azok a Fermat-számok, amelyeknél a kitevő

$$n = 0, 1, 2, 3, 4,$$

a megfelelő számok pedig

3, 5, 17, 257, 65537,

prímszámok. Egy évszázaddal Fermat után azonban Leonhard Euler svájci matematikus-óriás bebizonyította, hogy

$$2^{2^5} + 1$$

nem prím. A számítógépes technológia hajnalán egészen az  $n$  kitevő tízezres nagyságrendjéig vizsgálták az igen nagy Fermat-számokat, és mindről kiderült, hogy összetett szám. Még ma is nyitott a kérdés, vajon ebben az osztályban csak  $n = 4$  -ig kizárólag az első öt Fermat-szám prímszám-e.

Az 1800-as években Gauss egy nagyon érdekes összefüggést bizonyított be, azt állította, hogy csak a prím Fermat-számoknak felelnek meg egyenes vonalzóval és körzővel megszerkeszthető olyan szabályos sokszögek, melyeknek oldalszáma prím. Tudjuk, hogy a háromszög és az ötszög megszerkeszthető, vajon miért nem tudunk hétszöget szerkeszteni? Gauss zseniális bizonyítása túlmutat e könyv keretein, és csak a csodálkozás a részünk, hogy miért igaz ez.

A hármas szám prím-természete több annál, mint hogy ez az első szabályos prím, vagy az első Fermat-szám. Más prímszám-definíciók osztályának is eleme. Például ez az első ún. Mersenne-prím, azaz  $2^p - 1$  alakú

prím, ahol  $p$  prímszám. Ezt az osztályozást az 1600-as évek elején Mersenne francia szerzetes határozta meg, aki a koordináta-rendszeréről híres Descartes iskola-társa volt.

Világos, hogy  $2^2 - 1 = 3$  az első ilyen alakú prím, a következő elem  $2^3 - 1 = 7$ . A következő néhány Mersenne-prímről,  $2^5 - 1 = 31$  és  $2^7 - 1 = 127$  már az ókori görögök is felismerték, hogy prímszám. Számos Mersenne-prímet, mint  $2^{17} - 1$  és  $2^{19} - 1$  még Mersenne osztályozása előtt, a középkorban fedeztek fel.  $2^{31} - 1$  volt az első nagy prímszám, melyről Euler a 18. században állapította meg, hogy Mersenne-prím.

A Mersenne-számok osztálya azonban nem teljesen zárt. Például  $2^p - 1$   $p=11,23,29,37$  esetén nem prímszámot ad. Azonban mégis hatékony definíció új prímek keresésére, még a legfejlettebb számítógépek korában is. Ha meg akarjuk gyorsítani a Mersenne-prímek keresését, a hármas szám egy másik érdekes megjelenését, a háromtagú sorozatot alkalmazhatjuk, ez egy későbbi fejezetben szerepel.

A 19. század közepén a francia Lucas alkotta meg a következő sorozatot:

$$L_k = L_{k-1} + L_{k-2}$$

melynek első tagjai

$$L_0 = 2,$$

$$L_1 = 1.$$

Ezért

$$L_2 = 2 + 1 = 3.$$

Ez a Lucas-sorozat, amelynek tagjai

$$L_k = 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47\dots$$

Az eredmény érdekessége az, hogy sok Lucas-szám prím. Valójában a 4 és a 18 esetét kivéve az összes többi prímszám (eltekintve az 1 és 2 vitatott prímszám voltától). Mivel a sorozat definíciója alapján a Lucas-számokat nagyon egyszerű előállítani, a számítógépes számelméletben hatékony módszer a nagyon nagy prímszámok keresésére, amely további kutatási téma.

A prímszámok világában a 3 egy másik sajátossága, hogy az egyetlen olyan prím, amely szomszédos egy másik prímmel, a kettővel. Ennélfogva sok prímszám alakja

$$(2 \cdot 3)n \pm 1$$

ahol  $n$  egész.

Például  $n = 1$  esetén 5 és 7 az eredmény,  $n = 2$  adja 11 és 13-at,  $n = 3$  17-et és 19-et. Azonban  $n = 4$  és  $n = 6$  nem prímszámot ad, de  $n = 5$  és  $n = 7$  eredménye 29, 31 valamint 41, 43. Ez alapján gondolhatnánk, hogy a prímek

$$(2 \cdot 3)^p \pm 1$$

alakúak, ahol  $p$  prím. Azonban  $p = 11$  esetén reményeink meghiúsulnak, mivel 65 nem prímszám. Ahogy sok más, a prímszámokra vonatkozó ígéretes hipotézisről, erről is kiderült, hogy nem érvényes, azonban további érdekességeket rejt.

Írjuk fel a természetes számokat hármassával, két oszlopba rendezve:

<b>1, 2, 3,</b>	4, <b>5, 6</b>
<b>7, 8, 9,</b>	10, <b>11, 12</b>
<b>13, 14, 15,</b>	16, <b>17, 18</b>
<b>19, 20, 21,</b>	22, <b>23, 24</b>
25, 26, 27,	28, <b>29, 30</b>
<b>31, 32, 33,</b>	34, 35, 36
<b>37, 38, 39,</b>	40, <b>41, 42</b>
<b>43, 44, 45,</b>	46, <b>47, 48</b>

Ha megfigyeljük a vastagon kiemelt prímszámok elhelyezkedését, feltűnő, hogy a kezdősort kivéve mindig ugyanabban a két oszlopban találjuk meg a prímekeket. Az első hármass csoport első oszlopában, a második

hármask csoport második oszlopában (csodálatos a szimmetria). A többi oszlopban egyáltalán nem találhatók prímszámok. Sajnos a prímszámokat tartalmazó oszlopokban nem kizárólag prímek vannak: az első oszlop 25-nél, a második oszlop 35-nél töri meg a szabályszerűséget. Ezért ez sem bizonyult az emberiség keresett csoda-módszerének, és a prímszámok elhelyezkedése továbbra is kutatás tárgya maradt.

Goldbach német matematikus sokat ígérő sejtése, hogy minden 3 fölötti (újra a határkapu!) páros szám felírható két prímszám összegeként:

$$4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, \dots$$

Bizonyos páros számoknak kétféle alakja is létezik, például:

$$10 = 3 + 7 = 5 + 5.$$

250 év elteltével a sejtés még mindig nem bizonyított. Azonban az sokkal figyelemre méltóbb, hogy a modern számítógépek  $10^{10}$  nagyságrendig megvizsgálták már, és nem találtak ellenpéldát. Ez a tény hihetőbbé teszi a sejtést, de természetesen nem kezeskedik arról, hogy igaz is.

A nagy prímszámok elragadják az ember képzeletét. A ma ismert legnagyobb prímet 2008-ban egy tudóscsoport fedezte fel, ez egy Mersenne-prím

$2^{43112609} - 1$ .

A szám 12.978.189 számjegyből áll és a 45. ismert Mersenne-prím. Ezeket a nagy számokat főleg azért keressük, hogy eloszlásukról valamiféle szabályszerűséget állapíthassunk meg, és hogy rápillanthassunk az univerzum egyik titkára.

Miért olyan fontos ez a téma? Azért, mert ha általában ismernénk a prímszámok elhelyezkedését, akkor könnyen felírhatnánk a nagyon nagy számokat szorzat-alakban. Ez veszélyeztetné a pénzügyi világ titkosítási rendszerét, mivel a tranzakciók titkos kódolása könnyen feloldható lenne. Ez hatalmas ösztönzést ad a kutatáshoz, nem beszélve arról, hogy halhatatlanná válik, aki megoldja ezt a problémát, amely az elmúlt századok során sok matematikus zsenit alázatra készítetett.

## 9. fejezet

### FRANCIA RÖGESZME: A HARMADIK HATVÁNY

Eddig főleg a hármas szám hatványozott szerepét vizsgáltuk. Most matematikai értelemben tanulmányozzuk a harmadik hatványt. A matematikai gondolkodás kezdete óta kihívást jelent egy szám harmadik hatványának bonyolultsága. Különös érdeklődés fordult afelé, hogy kapcsolatot találjanak egy szám harmadik hatványai, a köbszámok, és más természetes számok között.

Az ókori görögök már felismerték, hogy egy köbszám mindig felírható, mint egymást követő páratlan számok összege:

$$\begin{aligned}1^3 &= 1, \\2^3 &= 3 + 5 = 8, \\3^3 &= 7 + 9 + 11 = 27.\end{aligned}$$

Egy további példa:

$$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$$

jelzi, hogy általános szabályról van szó. Elég könnyű felírni egy köbszám összeg-alakját, ha megfigyeljük,

hogy páros köbszám esetén az egymást követő páratlan számok összege páros számú tagból áll. És egy páratlan köbszám felírásakor az egymást követő páratlan számok összegében páratlan számú tag szerepel, és a tagok száma megegyezik a hatványalappal, például:  $8 = 2^3$  esetén kettő,  $125 = 5^3$  esetén öt.

Még érdekesebb ennek a kérdésnek a fordítottja: hogyan lehet egy természetes számot köbszámok összegeként előállítani. Ez teljesen más probléma.

Tekintsünk először egy köbszámot. Természetesen ez egyetlen szám köbe lehet csak, például  $27 = 3^3$ . Másrészt vegyünk egy nem-köbszámot, például 23.

$$23 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3.$$

Ez kilenctagú ( $3^3$ ) összeg. Egy kevéssé ismert 18. századi angol matematikus Waring sejtése volt, hogy minden természetes szám felírható legfeljebb kilenc köbszám összegeként. Ez biztosan igaz a köbszámokra, de például

$$36 = 3^3 + 2^3 + 1^3$$

csak három tagból épül fel. A Waring-hipotézis jelentősége az, hogy függetlenül a szám nagyságától a köbszámok összegzésekor legfeljebb kilenc tag szerepel.

Majdnem további két évszázad telt el, amíg bebizonyították, hogy a 23-on kívül egyetlen olyan szám létezik, amelyben a tagok száma kilenc, és ez a szám a 239

$$239 = 4^3 + 4^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3.$$

Ez rendkívül furcsa, mert arra következtethetünk, hogy még a nagyon nagy számokat is felírhatjuk legfeljebb nyolc köbszám összegeként. Feltűnő, hogy a 3 ismét alapvetően kapuként viselkedik, és nem találunk magyarázatot.

Bármilyen különös is ez, még érdekesebb, hogy jelen pillanatban a legnagyobb szám csak a 454, amely nyolc köbszám összegéből áll. Ezt számítógép segítségével állapították meg úgy, hogy egészen 50.000-ig kerestek ilyen számokat. Folytatódik a kutatás, de úgy tűnik, van egy maximális szám, amely fölött minden szám felírható kevesebb, mint nyolc köbszám összegeként.

I. e. 100 körül a görög Diophantus megoldást keresett a következő típusú egyenletekre:

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

Ő is Alexandriában dolgozott, mint Euklidesz és Eratoszthenész, és *Arithmetica* című műve máig fennmaradt. Ahogy Euklidesz a geometria atyja, úgy Diophantus az algebra megteremtője. Megállapította, hogy az egyenlet másodfokú esetben könnyen megoldható, ha feltesszük, hogy a számok alakja

$$x = a + \sqrt{2ab}$$

és

$$y = b + \sqrt{2ab},$$

ahol  $2ab$  teljes négyzet, vagyis négyzetgyöke egész szám. Ezután a jól ismert binomiális azonosságot alkalmazva:

$$x^2 + y^2 = a^2 + 2a\sqrt{2ab} + 2ab + b^2 + 2b\sqrt{2ab} + 2ab.$$

Átrendezve és csoportosítva a jobb oldalt:

$$(a + b)^2 + 2(a + b)\sqrt{2ab} + 2ab = (a + b + \sqrt{2ab})^2 = z^2.$$

Ezért a harmadik egész szám alakja:

$$z = a + b + \sqrt{2ab}.$$

Ennek alapján nagyon egyszerű a pitagorászi számhármások előállítására.

Például válasszuk az  $x = 5$  esetét. Úgy kell felírunk 5-öt, mint az  $a$  szám és egy teljes négyzetből vont gyök összege. Ez csak egyetlen módon lehetséges:

$$x = 5 = 1 + 4.$$

Tehát  $a = 1$  és

$$4 = \sqrt{2ab} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot b} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 8} = \sqrt{16}$$

$b = 8$  -at kaptunk és

$$y = 8 + \sqrt{2ab} = 8 + 4 = 12.$$

Ezért

$$z = 1 + 8 + \sqrt{16} = 13,$$

és valóban

$$5^2 + 12^2 = 13^2.$$

Elkerülve minden gyanúsítást, hogy szándékosan hagytuk ki  $x = 4$  esetét,

$$x = 4 = 2 + \sqrt{4} = 2 + \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1}$$

és kapjuk, hogy  $b = 1$ ,  $y = 1 + \sqrt{4} = 3$  és  $z = 2 + 1 + 2 = 5$ . Ezt a pitagorászi számhármast már ismerjük, tehát az eljárás akkor is jól működik, ha  $x > y$  és megfordítva.

Azokban az esetekben is alkalmazható, ha a kiindulási  $x$  érték többféle módon felírható, például

$$x = 9 = 1 + 8 = 5 + 4$$

mindkét alak jó eredményt ad. Az első esetben  $y = 12$  és  $z = 15$ ; a második esetben  $y = 40$  és  $z = 41$ . Mindkét megoldásra igaz, hogy

$$9^2 + 12^2 = 15^2$$

és

$$9^2 + 40^2 = 41^2.$$

Diophantust a harmadfokú egyenlet esete foglalkoztatta, de nem talált rá megoldást. A matematikusok majd 1700 évvel később vagy azon fáradoztak, hogy megoldást találjanak, vagy bebizonyítsák, hogy nincs megoldás.

A már említett ügyvéd és amatőr matematikus Fermat az 1600-as években olyan érdekes megállapítást tett, amely a következő századok során nem hagyta nyugodni a kutatókat. Diophantus *Arithmetica* c. könyvének margójára Fermat azt írta, hogy azért nem találta meg Diophantus a harmadfokú egyenlet megoldását, mert lehetetlen megoldani az

$$x^n + y^n = z^n$$

alakú egyenleteket  $n > 2$  esetében úgy, hogy egész számokat kapjunk. Azt is odaírta, hogy be tudja bizonyítani, csak nincs elég hely a könyv margóján.

Miután Fermat minden más tételét vagy saját maga, vagy mások bebizonyították, csak ezt az egyet nem, ezért lett Fermat utolsó tételének elnevezve.

Egy ideig abban reménykedtek, hogy találnak egy ellenpéldát a Fermat-sejtésre, bemutatva, hogy téves.

Néhányan közel jártak hozzá. Számos ehhez hasonló példa merült fel:

$$6^3 + 18^3 = 9^3 - 1,$$

vagy

$$216 + 512 = 729 - 1,$$

ahol az eltérés csak 1. De pontos cáfolat nem született Fermat sejtésére.

Fermat az  $n = 4$  esetet indirekt módon bizonyította, miközben egy másik problémán dolgozott. Azt az eljárást alkalmazta, amelyet ma végtelen kicsinyítési módszernek nevezünk. Fermat arra törekedett, hogy ellentmondásba ütközzön, ha feltételezi, hogy van megoldás, például

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^4.$$

Ebből a feltevésből kiindulva megmutatta, hogy akkor egy másik, kisebb megoldásnak is léteznie kell, mondjuk  $x_2, y_2, z_2$ . Ugyanígy ismételve a végtelenségig egyre kisebb és kisebb számhármassok adják a megoldást.

Ez azonban ellentmond annak, hogy a legkisebb megoldási halmazzt a természetes számok körében kell keresni. Ezért az eredeti feltevés, – hogy van megoldása a feladatnak – hamis, és nincs a természetes számok körében megoldása az

$$x^4 + y^4 = z^4$$

egyenletnek.

Végül a 17. században Euler bebizonyította, hogy az

$$x^3 + y^3 = z^3$$

harmadfokú egyenletnek sincs megoldása a természetes számok között.

Ez azért különösen fontos, mivel a 3 prímszám (és kitüntetetten híres), és ha be lehetne bizonyítani, hogy minden prímszámra igaz a tétel, abból következik, hogy minden összetett számra is igaz, vagyis minden számra teljesül.

Még száz év telt el, amíg a francia Dirichlet az ötödik hatvány esetére bizonyította, hogy az

$$x^5 + y^5 = z^5$$

egyenletnek sem létezik egész megoldása. Az 1830-as években egy másik francia matematikus, Lamé adta a harmadik prímszámra,  $n = 7$  esetére a bizonyítást.

Megoldása részben a szintén francia Sophie Germain munkáján alapult. Ő volt az egyik első női matematikus, abban az időben, amikor a nők számára ezt a tevékenységet helytelenítették. Ezt az akadályt úgy győzte

le, hogy férfinéven mutatta be munkáit és olyan sikeres volt, hogy még Gauss-szal is levelezést folytatott.

Az 1800-as évek elején Sophie Germain a

$$2 \cdot p + 1$$

alakú számokat tanulmányozta, ahol  $p$  prímszám. Észrevette, hogy az ilyen számok gyakran prímek, – az ő tiszteletére nevezzük ma Germain-prímeknek.

Ez a számosztály a Fermat-sejtés  $n = 7$  esetén történő bizonyításánál vált hasznossá.

Ebben az időben a téma annyira foglalkoztatta a franciákat, hogy 1850-ben a Francia Tudományos Akadémia 3000 frank összegű díjat tűzött ki a probléma megoldására. Vagy tucatnyi matematikus nyújtotta be dolgozatát, remélve, hogy igazolja, vagy cáfolja a sejtést. A legismertebb Cauchy volt, aki még egy akadémiai ülésen be is jelentette, hogy kész a megoldása, de másokéhoz hasonlóan később hibásnak bizonyult.

A kutatás majdnem az évezred végéig folytatódott. Végül csak a 20. század utolsó évtizedében sikerült az Amerikában dolgozó brit Andrew Wiles matematikusnak, hogy az általános esetet, tetszőleges kitevőre bizonyítsa.

1995-ben mutatta be bizonyítását, amelyet a téma iránt egy életen át tartó lelkesedés, és egy évtizednyi

célzott kutatás előzött meg. A bizonyítás a megszokott matematikai eszközökkel nem mutatható be, és egy egész kötetet igényelne a leírása. Fermat meglehetősen eltúlozta, hogy a könyv margója túl kicsi az általános tétel bizonyítására.

Itt elhagyjuk ezt a témát azzal, hogy bebizonyították, és a hármas szám újabb kapu-szerepét jelzi. Természetesen egy zárt kapu figyelhető meg: valami a határon túl, háromtól kezdve nem tehető meg.

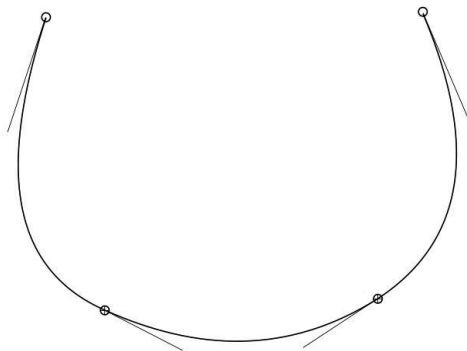
A hármas szám valóban gyakorlatias erejét az ókori hajóépítésben betöltött megdöbbentő szerepe mutatja be. Ismeretes, hogy a mediterrán népek több ezer év óta természetes fagerendákból bonyolultan hajlított bordázatú hajókat építettek. Kiderült, hogy a bordázat geometriai alakja olyan, amelyet ma harmadfokú görbe-illesztési módszernek nevezünk. Ez azt jelenti, hogy az alátámasztási pontok közötti íveket olyan egyszerű harmadfokú polinomokkal lehet leírni, melyek algebrai formája:

$$y(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3.$$

Matematikai értelemben azt a fizikai jelenséget, amikor egy flexibilis gerendát (tangenciális) egyenesek mentén meghajlítunk, olyan differenciálegyenlettel írható le, melynek analitikus megoldása harmadfokú polinomokkal adható meg.

Egyébként a modern hajóépítő-iparban elterjedt módszer volt, hogy a hajóprofil alakját flexibilis fából készült hajlékony vonalzó, ún. spline-ok segítségével kiterítették a földön. A tífából készült hajlékony vonalzókat ólomsúlyok tartották állandó irányban és helyzetben, ezáltal befolyásolva az ívet. Az ólomsúlyok elnevezése delfin volt, és ezen a ponton már rég túljutottunk az egyenes vonalzó használatán.

A 9.1. ábra egy olyan görbét mutat be, amely négy pont, és a négy pontban húzott érintők által meghatározott három ívből áll. A teljes görbe folytonos, és gyönyörűen ívelt, ugyanúgy, mint a hajóprofil meghatározó favonalzó. Az így nyert ívek szerint szabták ki a hajó különböző részeinek bordázatát, és ugyanígy ezeket a fa-sablonokat használták a fém bordázat és a hosszanti profil elkészítésénél.



9.1. ábra Spline-görbe

Ezek a függvények a matematikai ábrázolás által a mérnöki munka számos területére behatoltak. Még ma is a hajóépítésben eredetileg használt spline a nevük. Azonban ma már olyan, a mindennapi életben előforduló komplex görbék matematikai leírására használjuk, mint testünk és arcunk körvonala, az állatok és a növények formája, az autók és a háztartási gépek mechanikai részeinek alakja.

Ez az egyszerű építőkö nélkülözhetlenné vált a CAD (Computer Aided Design = számítógéppel támogatott tervezés) és a gyártás területén; és a hármas szám erősségének újabb bizonyítékát adja.

## 10. fejezet

### OLASZ TÁMADÁS A KÖB-SOROMPÓ ELLEN

Harmadfokú egyenletet úgy kapunk, ha az ismeretlen harmadik hatványát tartalmazó algebrai kifejezést úgy rendezzük át, hogy a jobboldal nulla legyen, és az  $x$  ismeretlen olyan értékeit keressük, amelyek megfelelnek a feltételnek.

Általános alakja:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

ahol nem korlátozza az általánosságot, hogy az ismeretlen harmadik hatványra emelt tagjának együtthatóját egynek választottuk, mivel ha elosztjuk az egész egyenletet a harmadik hatványon levő tag együtthatójával, ez mindig elérhető.

Az emberi gondolkodást igen hosszú ideig kihívás elé állították ezek az egyenletek. Míg a másodfokú egyenletek általános megoldását már időszámításunk előtt több évszázaddal ismerték, a harmadfokúra vonatkozó megoldás majdnem két évezredig kisiklott

a kezünkből. Néhány sikeres megoldás született a harmadfokú egyenlet bizonyos speciális típusaira, adott egész együtthatók esetén.

A középkorban az a meggyőződés alakult ki, hogy a harmadik hatvány egy áthatolhatatlan akadályt jelent, mivel tetszőleges együtthatók esetén a harmadfokú egyenlet makacsul ellenállt az általános algebrai megoldási kísérleteknek. Változás csak az 1500-as évek elején történt, amikor az olasz del Ferro tisztán algebrai módszerekkel megoldást talált egy speciális alakú, tetszőleges együtthatójú harmadfokú egyenletre:

$$x^3 + px = q.$$

Annyi korlátozást vezetett be, hogy az együtthatók csak pozitív számok lehetnek, de mint később kiderült, ez nem szükséges. Del Ferro szellemes ötlete, hogy a megoldást kéttagú összeg alakjában kereste. Visszahelyettesítve az eredeti harmadfokú egyenletbe, egy első ránézésre ijesztő hatodfokú egyenletet kapunk, egy új  $u$  ismeretlennel. Úgy tűnt, hogy ötlete nem valósítható meg. Azonban alaposabb vizsgálat után kiderült, hogy valójában egy  $u^3$ -re vonatkozó másodfokú egyenletről van szó, amely természetesen megoldható. Mivel del Ferro csak pozitív együtthatókat engedett meg, a megoldás mindig valós szám.

Valóban, differenciál- és integrálszámítási módszerekkel bizonyítható, hogy del Ferro pozitív együtthatós egyenletének mindig van valós gyöke.

A harmadfokú egyenlet regényes történetét Tartaglia, egy másik olasz folytatta (a becenév jelentése: dadogó), aki del Ferro kortársa volt, és egy másik speciális esetet oldott meg:

$$x^3 + rx^2 = q.$$

Sem del Ferro, sem Tartaglia nem oldotta meg az általános problémát. Ez csak egy harmadik (!) olasznak, Cardanonak sikerült, aki egyes források szerint csupán két elődje eredményeit egyesítette. Sőt voltak, akik plágiumnak tekintették a harmadfokú egyenlet általános megoldását, mivel véleményük szerint Cardano csak kortársai eredményeit összegezte és publikálta.

Az általános harmadfokú egyenlet megoldása a Cardano-képlet:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{a_1}{3},$$

ahol

$$p = a_2 - \frac{a_1^2}{3}$$

és

$$q = -\frac{2a_1^3}{27} + \frac{a_1 a_2}{3} - a_3.$$

Ez a helyettesítés az általános feladatot del Ferro speciális problémájává dolgozza át. Cardano megoldása

lényegében nem más, mint del Ferro megoldása, csak nem alkalmazza del Ferro megszorítását a pozitív együtthatókra. Ebben az esetben negatív szám is lehet a gyök alatt, és ez olyan helyzet, amelytől a középkorban a harmadik hatvánnyal foglalkozó matematikusok zavarba jöttek, mivel a komplex számokat még nem találták ki.

Cardano úgy döntött, hogy abban az esetben, ha a képlet negatív számot adott a gyök alatt, azok (az ő elnevezése szerint) „irreducibilis köbök”, és figyelmen kívül hagyta.

Cardano egyik olasz kortársa, a mérnök Bombelli arra az óriási felismerésre jutott, hogy a két tag összege a gyök alatti negatív számok ellenére valós számot eredményez. Bátran úgy döntött, ha feltételezzük, hogy a gyök alatti negatív számnak van értelme, a probléma megoldható. Vezessük be a következő jelölést:

$$s = q^2/4 + p^3/27.$$

Ezzel a Cardano-képlet megoldásának alakja:

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{-s}}$$

és

$$v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{-s}}.$$

Bombelli fortélyos átírása a következő volt:

$$u^3 + v^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{-s} + \frac{q}{2} - \sqrt{-s} = q.$$

Ha alkalmazzuk a két tag harmadik hatványára vonatkozó összefüggést:

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 6uv + 3uv^2 + v^3,$$

és végrehajtunk néhány algebrai átalakítást, akkor megoldható lesz az

$$u + v = r,$$

ahol  $r$  valós szám. Például, ha a harmadfokú egyenlet eredménye

$$\sqrt[3]{10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{-243}} = 20 = u + v$$

akkor Bombelli felírásában:

$$u^3 + v^3 = 10 + \sqrt{-243} + 10 - \sqrt{-243} = 20$$

és ez az algebrai trükk adja, hogy

$$u + v = 5.$$

Egyszerű zsebszámológéppel ma könnyen kiszámítható, de Bombelli nyilván nem rendelkezett vele. Azt is

megállapította, hogy a Cardano-képletben a gyök alatti negatív szám esetén a harmadfokú egyenletnek mindig három valós megoldása van. Talán ez a legfontosabb felismerés a harmadfokú egyenletek témájában, amely valóban közös olasz vállalkozás volt.

Úgy tűnt, hogy végleg félretehető a harmadfokú egyenlet témája. Azonban mivel annyira nehéz volt a harmadfokú egyenlet megoldása, ez ösztönzést adott a magasabb fokú algebrai egyenletek vizsgálatához. Hamarosan felmerült az az elképzelés, hogy van egy végső határ, amely fölött az algebrai egyenletek megoldása nem adható meg zárt alakban. Vajon a három jelenti a sorompót, – habár nyitott – és utána nem létezik megoldás?

Ezért az

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

negyedfokú egyenlet megoldása az olasz matematikusokat tovább foglalkoztatta.

Cardano kortársa, Ferrari briliáns megoldást adott úgy, hogy a negyedfokú egyenletet harmadfokúvá alakította át, ma ezt köb-rezolvensnek nevezzük és ez természetesen megoldható a Cardano-képlet segítségével. Így áttörte a sorompót, a harmadfokú felhasználásával sikerült a negyedfokú egyenlet megoldása.

## Az ötödfokú egyenlet

$$x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

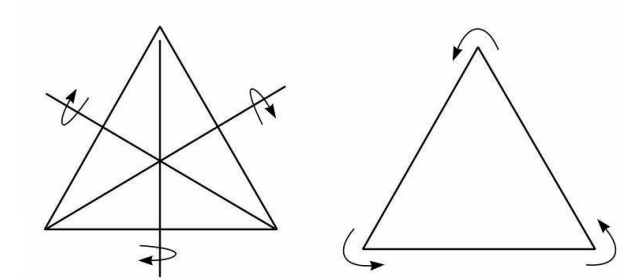
azonban kemény diónak bizonyult. Több évszázadon át küzdöttek vele, sikertelenül. Egy másik torinói születésű matematikus, Lagrange a 18. század utolsó negyedében vette fel vele a harcot. Elemezte az olasz matematikusok korábbi munkáit és rájött, hogy elődei úgy oldották meg az egyenleteket, hogy egyszerűbb alakra transzformálták, amely eggyel alacsonyabb fokú, mint az eredeti egyenlet, ahogy Ferrari a negyedfokú egyenletet harmadfokú segítségével oldotta meg.

Azonban nem tudott olyan negyedfokú egyenletet kreálni, amely az ötödfokú egyenletet helyettesíti. Kiderült, hogy a segéd-egyenlet nem alacsonyabb, hanem egy fokkal magasabb: hatod-fokú egyenletet kapott, amelyet nem lehetett negyedfokúra redukálni. Mégsem állította, hogy az egyenlet megoldhatatlan.

Ezt egy másik olasz, Ruffini tette meg, amikor ráébredt, hogy az ötödfokú egyenletet azért olyan nehéz megoldani, mert valóban nem létezik zárt alakú megoldása. A 18. század utolsó napjaiban jelent meg *General Theory of Equations* (Az egyenletek általános elmélete) c. munkája, amelyben bebizonyította ezt a tételt. Bizonyítását a szimmetria és a permutációk kapcsolatára alapozta.

Egy objektum transzformációja – szűkítsük le a geometriai objektumokra – szerteágazó és nagyon általános fogalom. Egy újabb trichotómia köszön vissza, mivel három különböző transzformáció létezik. Ezek az eltolás, a forgatás és a tükrözés. A transzformáció szimmetrikus, ha a tárgy megőrzi szerkezetét és megjelenését. A fogalmat az egyenlő oldalú háromszög segítségével mutatjuk be.

Ha 120 vagy 240 fokkal forgatjuk el az egyenlő oldalú háromszöget, nyilvánvalóan ugyanazt az alakzatot kapjuk, mivel forgásszimmetrikus. A nulla fokos elforgatást is szimmetriának tekintjük, egy triviális esetnek. Ezért az egyenlő oldalú háromszögnek három forgásszimmetriája van. Ugyancsak három a szimmetriatengelyek száma, mivel az egyenlő oldalú háromszög bármely szögfelezőjére (tükör)szimmetrikus, lásd 10.1. ábra.



10.1. ábra Az egyenlő oldalú háromszög szimmetriái

Ennélfogva az egyenlő oldalú háromszög hat szimmetriával rendelkezik.

Jelöljük  $X, Y, Z$  -vel egy egyenlő oldalú háromszög csúcsait fent kezdve, az óramutató járásával megegyező irányban. A hat szimmetriát a csúcsokat jelölő betűk sorrendje írja le, ahogyan a transzformáció során a csúcsok elhelyezkedése megváltozik

$X, Y, Z$

$Z, X, Y$

$Y, Z, X$

$X, Z, Y$

$Y, X, Z$

$Z, Y, X$ .

Tehát ez a három betűnek a lehetséges hat permutációja. Lényegében egy összekötő hidat kaptunk az egyenlő oldalú háromszög transzformációi és a kombinatorikai számítások között, és látható, hogy három elem permutációinak száma:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

A! jelölést faktoriálisnak nevezzük, és általános definícióját megmutatja a példa.

Ruffini azt állította, hogy ha egy egyenlet megoldásait permutáljuk, az nem változtat az eredményen, azaz az egyenlet együtthatói és a gyökökön végzett algebrai

műveletek szimmetrikusak. Ez igaz a harmadfokú eset hat lehetséges permutációjára, sőt a negyedfokú egyenletnél a  $4! = 24$  permutációra is.

Bizonyos algebrai egyenletek azonban, mint az ötödfokú  $5! = 120$  permutációja nem enged meg ilyen szimmetrikus algebrai műveleteket, ezért ezeknek az egyenleteknek nincs megoldása. Ez a bizonyítási gondolatmenet, hogy az ötödfokú egyenletet lehetetlen megoldani – kifogástalan. Munkáját a bizonyítás hiányossága miatt nem fogadták el, és életében őt magát sem ismerték el. Azonban halála után egy generációval a következő korrekt bizonyítások az ő szimmetria-érvein alapultak.

Végül a babért az 1800-as években két tragikusan rövid életű (nem olasz) matematikus aratta le: mindketten húszas éveikben haltak meg. A norvég Abel tüdőbaját hazája zord időjárása csak fokozta. A francia Galois egy párbaj során szerzett sebesülésébe halt bele, – belekeveredett a hazájában dúló politikai csetepatékba. Egymástól függetlenül, de időben majdnem egyszerre mindketten bebizonyították, hogy az ötödfokú, és bármilyen magasabb fokú algebrai egyenletnek nincs általános zárt alakú megoldása.

Abel azt bizonyította, hogy egy algebrai egyenlet csak akkor oldható meg egy képlet segítségével (a megengedett algebrai műveletek: összeadás, kivonás, szorzás, gyökvonás), ha az egyenlet szimmetriáinak

permutáció-halmaza felosztható speciálisan definiált prímszám részhalmazokra. Ez lehetséges a másod-, harmad- és negyedfokú esetekben, de a magasabb fokú egyenleteknél nem. Ruffini nyomdokán haladva a szimmetria-érvet használta fel, és ezért ezt a bizonyítást néha Abel-Ruffini-tételként emlegetik.

Galois más irányból közelítette meg a kérdést, és bizonyítása a matematika egy új ágának, a csoportelméletnek alapját képezi. A permutációk lehetséges számát csoportokba osztotta és bebizonyította, hogy csak azok az egyenletek oldhatók meg, amelyek szimmetria-csoportjai speciális, ún. normál alcsoportokba sorolhatók. Bizonyítását életében vonakodva fogadták, mert radikálisan új megközelítését a matematikai elit nem szívesen ismerte el.

Végül kiderült, hogy a köb egy határsorompó, bár nem áthatolhatatlan, mivel a negyedfokú egyenletre létezik (a harmadfokún alapuló) megoldás, azonban mégiscsak a megoldhatatlan területének őrszeme. Most inkább filozófiai vizekre evezünk. Csak negyedfokúig létezik általános megoldás (az is a harmadfokú segítségével), de miért ilyen módon épül fel a matematika? Vegyük észre, hogy ez nem ugyanaz a kérdés, melyre Ruffini, Abel és Galois megadta a választ.

Hogy miért ilyen a matematika, erre a kérdésre nincs válasz, ahogy a hármas szám szerepével kapcsolatos sok

más kérdésre sem. Ne hibázzunk, Ruffini és a többiek felfedezése ettől még felfedezés marad. Nem ők hozták létre a matematika rendszerét, melyet most mélyebben szeretnénk megérteni.

Csak tovább tűnődhetünk azon, hogy ki, hogyan és miért tehetett ilyenné.

## 11. fejezet

### A HÁROMLÁB ELVE

A háromláb stabilitása köztudott, az életben sokszor hasznos a három láb. Számos köznapi alkalmazása létezik a fényképezőgép állványától a cipész háromlábú székéig. Kicsit általánosítva: sok algebrai számítás hatékonyabb, vagy csakis úgy kivitelezhető, ha három tagot, három pontot vagy három átlót veszünk figyelembe.

A háromtagú sorozatok olyan számsorok, melyeket rekurzív módon definiálunk a három tag alapján. Az egyik legkorábbi ilyen sorozatot egy amatőr matematikus írta le az 1200-as évek elején az olaszországi Pisa városában, akit csak Fibonacci csúfnéven ismerünk. Egy nagyon egyszerű, de igen jellegzetes kapcsolat áll fenn a három tag között – ez a Fibonacci-sorozat

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$$

azaz a sorozat következő tagját mindig az előző két tag összege adja meg. Ez a háromtagú sorozat klasszikus definíciója.

A kezdőértékek:

$$F_0 = 0$$

és

$$F_1 = 1.$$

Ekkor

$$F_2 = 0 + 1 = 1,$$

és a keletkező számsorozat:

$$F_k = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Érdekes módon két egymást követő Fibonacci-szám hányadosa aszimptotikusan közelíti az aranymetszés értékét, melynek geometriai vonatkozásairól egy korábbi fejezetben szóltunk. Ha  $k$  elég nagy,

$$F_k / F_{k-1} \approx (\sqrt{5} - 1) / 2$$

Fibonaccit valójában a harmadfokú egyenlet megoldása érdekelte, amely az előző fejezet témája volt. A sorozatot azért alkotta meg, hogy a különféle gyökös kifejezések – mint az egymásba ágyazott  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$  irracionális számaival kapcsolatot találjon. Az ő idejében ezektől remélték, hogy elvezetnek a harmadfokú

egyenlet nehezen megfogható általános megoldásához, és az előző fejezetből már kitűnik, hogy jó nyomon járt.

Három pontra hagyatkozva a különféle differenciál- és integrálszámítási problémákra is jó közelítő megoldásokat kapunk. Az egyik ilyen egy függvény deriváltjának a kiszámítása. Geometriailag egy függvény deriváltja azt jelenti, hogy az adott pontban milyen a függvény érintőjének meredeksége. Bizonyos függvényosztályok esetén ez könnyen meghatározható az ismert derivált-függvény segítségével. Azonban a gyakorlatban számos olyan eset adódik, amikor a derivált-függvény bonyolult, sőt nem adható meg zárt alakban.

A három pontos véges differencia módszere a függvény három ismert pontját veszi alapul, amelyek közül bármelyik pontban kereshetjük a derivált értékét.

Legyen a három adott pont

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2),$$

és tegyük fel, hogy  $x$  koordinátáik szerint növekvő sorrendbe rendeztük:

$$x_0 < x_1 < x_2.$$

Gyakorlati körülmények között, amikor a három pontot valamilyen mérés-sorozatból nyerjük, az adott

pontok elég gyakran azonos távolságra vannak egymástól. Például ha ez a távolság  $h$ , akkor

$$x_1 = x_0 + h$$

és

$$x_2 = x_1 + h.$$

Először határozzuk meg a középső pontban a deriváltat. A következő rendkívül egyszerű képlet adja a közelítő értéket a középső pontban:

$$f'(x_1) = (f(x_0) - f(x_2)) / 2h.$$

Ez geometriailag természetesen nem más, mint a két szélső pont közötti húr meredeksége. Világos, hogy a pontok távolsága befolyásolja a közelítés pontosságát, viszont csak három pontra van szükségünk. Ugyanezen három pont esetén bármelyik végpontban is kiszámítható a derivált. Például a bal oldali végpontban:

$$f'(x_0) = (-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)) / 2h.$$

Ez a számítás előre tekint, és a célba vett  $x_0$  pont után következő két pontot veszi alapul, ezért a képlet elnevezése előretekintő hárompontos képlet.

Az együtthatók meghatározása figyelembe veszi ezt a kiegyensúlyozatlanságot.

A visszatekintő hárompontos képletet úgy kapjuk, ha egyszerűen megfordítjuk a pontok sorrendjét.

Egy másik alapvető feladat, a függvény egy szakaszra vonatkozó integrálja is hatékonyan és pontosan megoldható a hárompontos megközelítés segítségével.

Ennek geometriai jelentése a függvény alatti terület az  $x$  tengelyen definiált végpontok között

$$a = x_0$$

és

$$b = x_2.$$

A középső pontot itt is úgy választjuk ki, hogy felezőpont legyen, mint a derivált esetén. A még ma is használt, és nagyon hatékony képletet először Simpson brit matematikus írta le a 18. században:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

Itt geometriailag a függvény minden egyes részét lényegében parabolával helyettesíti. A módszer kiterjeszhető több pontból álló olyan halmazra is, amelyen egyszerre három pontot figyelembe vevő stratégiával haladunk át. Például öt pont esetén

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$$

a képlet:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$$

Nyilvánvaló, hogy a szélső függvényértékek szorzója 1, a páratlan sorszámú értékek szorzótényezője 4, a páros sorszámú tagoké pedig 2. Ez tovább általánosítható tetszőleges számú pont esetére. Gyakorlati esetekben a folyamat tulajdonképpen fordított. Kiindulunk három pontból, és fokozatos finomítással közbenső pontokat iktatunk be, hogy a megoldás pontosságát növeljük.

A finomítási pontok száma a függvény „simaságától”, vagy ennek hiányától függ.

A hármas szám jelentősen hozzájárul, hogy megállapítsuk egy függvény helyi viselkedését a kérdéses pont közelében. Sőt az elv, hogy egy nagyobb halmazt hármasával közelítünk meg, még tovább vihető, és eredménye a háromtagú rekurzió.

A háromtagú rekurziók hasonlók a Fibonacci-féle három elemmel meghatározott sorozatokhoz, de függvényekkel definiáljuk. Ilyen jól ismert és nagyon hasznos, az 1800-as évek elején publikált háromtagú rekurzió köszönhető az orosz Csebisevnek.

A Csebisev-polinomban a három tag kapcsolata a következő:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x).$$

Ha  $T_0(x) = 1$  és  $T_1(x) = x$ , akkor  $T_2(x) = 2x^2 - 1$  és  $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ .

A Csebisev-polinomok érdekes szimmetria-tulajdonságaik miatt jelentősen hozzájárulnak a függvényközelítési módszer hasznosságához.

Kiszámítva az  $a_k$  együtthatókat megkapjuk egy függvényközelítést:

$$f(x) \approx a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \dots$$

Ennek az alaknak különösen a periodikus függvények közelítésénél van jelentősége, mivel célszerűbb és néha hatékonyabb is, mint a Fourier közelítés.

Sok gyakorlati esetben a Csebisev-féle módszer a nem-triviális periodikus függvények közelítésekor fontos.

A széles körben elterjedt három elemmel definiált rekurziók nemcsak az approximációk esetében hasznosak, hanem a mátrixok tridiagonális alakra redukálásában is szerepet játszanak. Ezek a tridiagonális alakok a hármas szám végtelenbe vezető kapu-szerepének újabb fontos megnyilvánulási formái.

Egy  $A$  mátrix sorokba és oszlopokba rendezett számadatokból áll.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Itt a pontok azt jelzik, hogy a mátrix akárhány sort és oszlopot tartalmazhat.

Minden négyzetes mátrix (melyben a sorok és az oszlopok száma egyenlő) esetén definiálhatunk egy nagyon fontos mennyiséget, a mátrix sajátértékét:

$$A\varphi = \lambda\varphi,$$

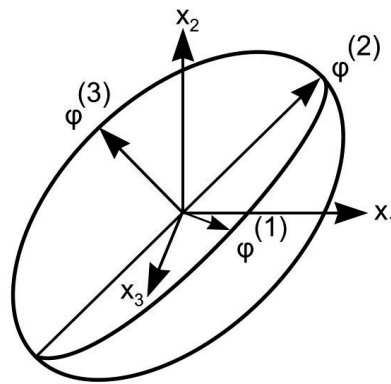
ahol a  $\lambda$  skalár szorzótényező a mátrix egy sajátértéke, és a  $\varphi$  vektor egy sajátvektora. A harmadrendű mátrixnak három sajátértéke és sajátvektora van.

Régebben főértéknek és fővektornak is nevezték, de végül maradt a német eredetű szó tükörfordítása. Belátva, hogy az előre meghatározott matematikai mélység határához értünk, a következőket viszonylag egyszerű társalgási szinten tárgyaljuk.

A sajátérték és a sajátvektor fizikai jelentése rendkívül fontos abban az esetben, ha a mátrix valamely valóságos jelenséget ír le. Amikor egy szerkezet, mint például egy híd, vagy repülőgépszárny dinamikus viselkedését írja le a mátrix, akkor a sajátérték az ún. rezonancia-frekvenciának felel meg, amelynél a szerkezet

instabillá válik. A hozzátartozó sajátvektor az instabil állapotban lévő szerkezet alakját ábrázolja.

A sajátértékek és sajátvektorok geometriai jelentése egy, a mátrix által reprezentált ellipszoidhoz kapcsolódik. Képzeljünk el egy rögbiben használatos labdát, – lásd a 11.1. ábra –, ezt az ellipszoidot úgy kapjuk, hogy egy ellipszist az  $x_1$ ,  $x_2$  és  $x_3$  –mal jelölt koordinátatengelyek mentén elforgatjuk.



11.1. ábra Az ellipszoid főtengelyei

Az ábrán  $\varphi^{(1)}$ ,  $\varphi^{(2)}$  és  $\varphi^{(3)}$  jelöli a három sajátvektort. Geometriai jelentésük, hogy megadják az ellipszoid ún. főtengelyeinek irányát, a sajátértékek pedig arányosak a főtengelyek hosszával. A labdán ez a legnagyobb és a legkisebb méretnek felel meg. Megjegyezzük, hogy két azonos legrövidebb irány van a labdán, mivel a hosszanti

tengelyre szimmetrikus. Egy általános mátrix esetén ez nem feltétlenül igaz. Máskülönben, – legalábbis három dimenzióban – az analógia fennáll. Magasabb rendű mátrixok esetében egy több dimenziós labdát kellene elképzelnünk, mivel ez bizonyos mentális kihívást jelent, ezért nem folytatjuk.

Sajnos, különösen nagyméretű mátrixoknál a sajátértékek és sajátvektorok közvetlen kiszámítása költséges művelet. A mátrixban a sorok számának harmadik hatványával arányos a kiszámítás költsége. Ha a sorok száma egymillió, a számítást még a legmodernebb számítógépek segítségével sem lehet a gyakorlatban végrehajtani.

Szerencsére a múlt század közepén Lánczos Kornél, egy magyar matematikus kitalált egy háromtagú ismétlődést, amely egyedülálló módon alkalmas a mátrix tridiagonális transzformálására; ez a mátrix csak a három átlóban tartalmaz nem-nulla elemeket. Az ilyen tridiagonális alak:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 \\ 0 & t_{32} & t_{33} & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Itt a pontok mutatják a további nem-nulla elemeket a mátrixban. A Lánczos-módszer a tridiagonális mátrix

egy bizonyos sorának 3 elemét számítja ki minden lépésben. A hármas előfordulási túlsúlya kétségtelen, de itt még nem ér véget. A tridiagonális alak jelentősége is háromszoros.

Először is ez az alak megtartja a mátrix eredeti  $\lambda$  sajátértékeit, ahogy a

$$T\bar{\varphi} = \lambda\bar{\varphi}$$

egyenlet mutatja. A tridiagonális alak  $\bar{\varphi}$  sajátvektoraik némiképp különböznek,

ezt a felülvonás jelzi, de a mátrix eredeti  $\varphi$  sajátvektoraik könnyedén visszanyerhetők.

Másodszor, a tridiagonális alak sajátértékei sokkal kevesebb számításal meghatározhatók. Ez nem tűnhet fel azonnal a fenti mátrix példájából, de minél nagyobb a mátrix mérete, a tridiagonális alak annál több nulla-elemet tartalmaz, és ez óriási előnyt jelent.

Harmadszor, nincs még egy olyan módszer, amely véges számú művelet révén tömörebb redukálást hozna létre. Eredetileg Jacobi porosz matematikus az 1800-as évek első felében fejlesztett ki egy módszert, amelynek célja az volt, hogy egyetlen átlóba sűrítse az elemeket. A probléma az, hogy ilyen alak létrehozásához a műveleti lépések száma végtelen is lehet.

Úgy tűnik, hogy egy mátrix tridiagonális alakja optimális abban az értelemben, hogy megtartva a mátrix sajátértékeit, véges számú művelettel ez a létrehozható legtömörebb alak, valóban újra a végtelen sorompójába ütközünk.

## 12. fejezet

# HALMAZHARMADOLÁS ÉS SZÁMOLÁS A VÉGTELENIG

Az ún. halmaz harmadolást vizsgálva végül belenyugodhatunk, hogy a három és a végtelen között szoros a kapcsolat. A harmadolást bizonyos szabályok rekurzív alkalmazásával úgy definiáljuk, hogy ismételten eltávolítjuk egy halmaz harmadrészét. Az 1880-as évek végén Cantor úgy definiált egy speciális harmadolást, hogy egy egyenes-szakaszból rekurzív módon eltávolította a középső harmadrészét.

Például tekintsük a számegyenesen a  $[0;1]$  intervallumot, az első lépésben eltávolítjuk az  $[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$  intervallumon belüli pontokat. Megjegyezzük, hogy az eltávolított rész határait nem vesszük ki a halmazból, így két részhalmazt kapunk:  $[0; \frac{1}{3}]$  és  $[\frac{2}{3}; 1]$ . A második lépésben mindkét részhalmazból elvesszük a középső harmadot, melyek:  $[1/9; 2/9]$  és  $[7/9; 8/9]$ .

A megmaradó halmaz négy szakaszból áll:

$[0; 1/9],$

$$[2/9; 3/9] = [2/9; 1/3],$$

$$[6/9; 7/9] = [2/3; 7/9],$$

$$[8/9; 1].$$

Figyeljük meg, hogy legelőször a középső harmadot, most pedig a középső kilencedet hagytuk el. Folytatva az eljárást egy  $1/27$  hosszúságú középső rész eltávolítása következik mind a négy szakaszból. A így keletkező halmaz most nyolc szakaszból áll:

$$[0; 1/27], \quad [2/27; 3/27],$$

$$[6/27; 7/27], \quad [8/27; 9/27],$$

$$[18/27; 19/27], \quad [20/27; 21/27],$$

$$[24/27; 25/27], \quad [26/27; 1].$$

A következő lépésben nyolc darab  $1/81$  hosszúságú rész vennénk ki, stb.

Az eltávolított szakaszok hosszának összege:

$$1/3 + 2/9 + 4/27 + 8/81 + \dots$$

Ez természetesen egy egyszerű mértani sorozat, amelynek kezdőtagja  $1/3$ , hányadosa  $2/3$ , így az összeg az ismert kifejezésből:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{1 - 2/3} = 1$$

Ez azt jelenti, hogy ha a végtelenségig folytatnánk az eljárást, akkor az egész kiindulási szakaszt el kellene távolítanunk. Ez azonban ellentmond annak, hogy a kivett szakaszok határoló-pontjai a halmaz elemei maradtak. Ez az eredmény valóban ellenkezik a megérzéseinkkel.

Még érdekesebb, hogy a maradék halmaznak sok olyan pontja van, amelyek nem végpontok, hanem belső pontok, például tekintsük a  $3/10$  számot. Mivel

$$2/9 = 20/90 < 27/90 = 3/10$$

és

$$3/10 = 27/90 < 30/90 = 3/9$$

vagyis

$$2/9 < 3/10 < 3/9,$$

tehát  $3/10$  a második eltávolítás után a halmazban maradt. A harmadik lépésben is benne marad, mert

$$8/27 = 80/270 < 81/270 = 3/10$$

és

$$3/10 = 81/270 < 90/270 = 9/27,$$

vagyis

$$8/27 < 3/10 < 9/27.$$

Tehát mindig a halmazban marad, függetlenül attól, hogy hány lépést hajtottunk már végre. Igazán összezavarodunk, hogy az egységszakasz harmadának egyszerű eltávolítása ilyen rejtélyes eredményre vezet. Természetesen ennek az az oka, hogy a kiindulási halmaz, az egységnyi hosszúságú szakasz pontjainak száma végtelen. Végtelen halmazok esetén a józan ész elveszni látszik.

A végtelen paradoxonja már a régi görög gondolkodóknál felmerült, nevezetesen Zénón az i.e. 5. században végezte el híres gondolat kísérletét – Akhilleusz és a teknősbéka esete – amely évszázadokon át, és néha még napjainkban is sokakat megdöbbent. Zénón azt állította, hogy Akhilleusz és a teknősbéka közötti versenyben – feltéve, hogy a teknős az indulásnál némi előnyt kap, mondjuk 100 méteres távon 10 métert, – Akhilleusz sohasem fogja utolérni.

Úgy érvelt, hogy mire Akhilleusz eléri azt a pontot, ahonnan a teknősbéka indult, addigra a teknős már haladt valamennyit előre. Amikor Akhilleusz eléri a teknősbéka új pozícióját, akkor a teknős már túlhaladt azon, és így tovább.

A dilemma gyökere természetesen az a kérdés, vajon bármilyen véges mennyiség a végtelenségig felosztható-e egyre kisebb és kisebb részekre, vagy egy idő után elérünk ahhoz a végső részecskéhez, amely tovább már nem osztható.

Ezt az érvet az univerzum egészére is alkalmazták. Egyik oldalon állt a véges univerzum modellje, kézen fogva a katolikus egyház Föld-középpontú filozófiájával. A másik oldalon a végtelen univerzum elképzelése, amely 1600-ban Giordano Bruno máglyahalálához vezetett.

Emiatt a tudósok rejtegették a végtelen világegyetemre vonatkozó nézeteiket. Maga Galilei is, három évtizeddel Giordano Bruno halála után kompromisszumra kényszerült és elismerte, hogy véges elménkkal képtelenek vagyunk megérteni a számok végtelenségét (elrejtve azt a tényt, hogy ő hitt a végtelen sok szám létezésében). Még ez a bölcs megfogalmazás sem mentette meg őt a sok éven át tartó házi őrizettől, és csak a pápához fűződő személyes kapcsolata óvta meg attól, hogy Giordano Bruno sorsára jusson.

Azután majdnem 50 évvel később véget ért a háború. Az egyháznak nem volt hatalma a német Leibniz munkái fölött, és az angol Newton végtelen kicsi inkrementumai vezettek a mai differenciál- és integrálszámításhoz. Az 1650-es évekre az egyház feladta az oszthatatlanságról szóló tanítása védelmezését.

Nem sokkal ezután, 1655-ben az angol Wallis bevezette a  $\infty$  szimbólumát, amelyet ma is használunk. Úgy értelmezte, mint egy olyan görbét, amelynek sem kezdete, sem vége nincs, és végtelen sokszor bejárhatjuk. A speciális jelölés bevezetésével kinyitotta Pandora szelencéjét. Ha a végtelennek jele van, ez arra utal, hogy az egy bizonyos szám. Akkor mekkora? És egy új háború kezdődött a végtelen megszámlálásáról.

A végtelen halmazok megszámlálhatósága óriási érdeklődés középpontjába került és érvek születtek arról, hogy a végtelen tényleges értékét lehetetlen meghatározni. Egyesek filozófiailag lehetségesnek tartották, de nem kiszámítható valóságnak. Azonban Cantor felismerte, hogy a végtelen halmazok elemei összeszámolhatók, ha a halmaz elemeihez egyértelműen hozzárendeljük a természetes számokat. Az ilyen halmazt megszámlálhatónak nevezte el, és a végtelen matematikáját a feje tetejére állította, szinte forradalmat indított el.

Cantor a végtelen halmazok megszámlálásával maradandót alkotott a számelmélet területén. Magát a halmazelméletet Cantor kortársa, a német Dedekind fogalmazta meg. A racionális számegeyenest bármely irracionális szám mentén két részhalmazra bontotta, manapság ezt Dedekind-vágásnak nevezzük. Támogatta Cantor elgondolásait, amelyeket az akkori matematikus körök általában nem fogadtak szívesen.

Cantor kortársai közül egyesek nem értettek egyet az ő megközelítésével. Egykori tanára, Kronecker, a  $\delta$  definiálójá olyan hevesen támadta Cantor munkáit, hogy még egyes publikációit is lehetetlenné tette. Feltételezzük, hogy csupán szakmai féltékenységből, – szomorú, hogy a tanár nem örült tanítványa eredményeinek.

Vagy talán csak nem értette meg. Végtére is ösztöneink azt súgják, hogy sokkal több racionális szám létezik, mint egész szám. Minden, két egymást követő egész szám között több racionális szám helyezkedik el – ez nagyon hihetőnek tűnik. Cantor azonban a végtelen számú racionális számot szellemesen egy kétdimenziós tömbbe rendezte el

1/1 2/1 3/1 4/1 ...

1/2 2/2 3/2 4/2 ...

1/3 2/3 3/3 4/3 ...

1/4 2/4 3/4 4/4 ...

... ..

Az első oszlop minden egynél kisebb törtet tartalmaz, ahol a nevező természetes szám, az első sor pedig az összes egész számot. Majd végigjárjuk az elemeket először egyet jobbra lépve, utána átlósan lefelé haladunk,

ezután lefelé és átlósan felfelé rekurzívan ismételve, míg nem minden törtet érintettünk.

Mivel vannak többször előforduló törtek, például az átlóban csupa egy értékű elem fordul elő, azt javasolta, hogy ezeket ne vegyük figyelembe. Az eljárás közben minden racionális számot sorban érintünk és kölcsönösen egyértelmű megfelelés keletkezik a természetes számokkal:

$$1/1, 2/1, 1/2, 1/3, 3/1, 4/1, 3/2, 2/3, \dots,$$
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$$

ahol az ismétlődő számokat kihagytuk. Ez a módszer lehetővé tette a racionális számok „megszámlálását”, tehát a racionális számok halmaza megszámlálható.

Bevezette az  $N_0$  jelölést minden olyan halmaz méretére, amely a természetes számokkal megszámlálható. Ezt nevezik ma a természetes számhalmaz rendszámának. Ez távolról sem jelenti azt, hogy minden végtelen halmaznak ugyanaz a számossága.

Cantor következő kutatása az algebrai számokra irányult, azokra a számokra, amelyek egész együttthatós többtagú egyenletek gyökeként keletkeznek.

A racionális számok e halmaznak egy részhalmazát képezik. 1874-ben Cantor megmutatta, hogy az algebrai számok halmaza is megszámlálható, és rendszáma szintén  $N_0$ .

Majd Cantor figyelme az transzcendens számok felé fordult. Transzcendens számnak – ahogy egy korábbi fejezetben definiáltuk – azokat nevezzük, amelyek nem kaphatók meg egész együtthatós többtagú egyenletek gyökeként, és így az algebrai számok komplementer halmazát jelentik. A  $\pi$  egy nevezetes példa a transzcendens számokra. Ebből az következne, hogy kevés ilyen szám van, de ez távol áll az igazságtól. Valójában sokkal több transzcendens szám létezik, mint algebrai szám, habár kevés annyira híres, mint a  $\pi$ . Cantor végül megmutatta, hogy az irracionális számok halmaza nem megszámlálható, miután a következőképpen bizonyította, hogy a valós számok halmaza sem megszámlálható.

A természetes számok és egy egyenes pontjai között keresett kölcsönösen egyértelmű megfelelést. Egyszerűsítsük le a kérdést arra, hogy csak az egységszakaszt vizsgáljuk. Az egységszakasz bármely pontját a szakasz elejétől mért távolsága határozza meg, tehát egy végtelen sok számjegyet tartalmazó tízes számrendszerbeli szám. Tegyük fel, hogy minden ilyen számot fel tudunk sorolni a következő alakban:

$$\begin{aligned}
 &0,a_1a_2a_3\dots \\
 &0,b_1b_2b_3\dots \\
 &0,c_1c_2c_3\dots \\
 &0,d_1d_2d_3\dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Ezt a felsorolást összepárosíthatnánk a természetes számokkal, és  $N_0$  rendszámú halmazt kapnánk. Cantor azonban ellenpéldát adott. A következő logikával hozott létre egy további új számot. Az első számjegy nem lehet egyenlő  $a_1$ -el, a második számjegy különbözik  $b_2$ -től, és így tovább a végtelenségig. Az új szám nyilvánvalóan nincs a felsorolásban, de feltettük, hogy az összes számot listába soroltuk, ezért ellentmondásba kerültünk.

Az a feltevés tehát hamis volt, hogy egy szakaszon elhelyezkedő minden valós számot sorba rendezhetünk és megszámlálhatunk a természetes számok halmazának segítségével. Így ez a halmaz nem megszámlálható és ez a végtelen magasabb rendű, mint a természetes számok rendje. A végtelen második rendszáma  $N_1$ , a valós számok számossága. Ez nyilvánvalóan bármilyen hosszú szakaszra alkalmazható, nemcsak a korábbiakban bemutatott egységszakaszra.

Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést tudunk létrehozni bármely két szakasz között. Képzünk el egy derékszögű háromszöget, és húzzunk a vízszintes oldal minden pontjából egy függőleges egyenest az átfogóig. Világos, hogy a befogó minden pontjának megfelel egy pont az átfogón. Azonban az átfogó nyilvánvalóan hosszabb, mint a befogó, ezért ki kellett hagynunk néhány pontot, ugye?

Nem. Képzünk el, hogy az átmérőből kiindulva húzzuk az egyeneseket, annak minden pontjából a

befogóra. Így is kölcsönösen egyértelmű megfelelést kapunk. Világos, hogy bármilyen két szakasz között egy-egyértelmű megfeleltetés létezik. Ezért bármely véges egyenes szakasz pontjait tartalmazó halmaz rendszáma  $N_1$ .

Eddig csak a valós számok, vagyis a kontinuum egy véges részhalmazával foglalkoztunk. Cantor azonban a végtelen általános mértékét igyekezett meghatározni, például egy végtelen egyenes, mint a számegyenes hosszát. Feltételezte, hogy ennek számossága is  $N_1$ , és élete hátralévő részét ennek bizonyításával töltötte, de hiába. Ez az állítás a Cantor-féle kontinuum-hipotézis.

Más nézetű gondolkodók egy általánosított kontinuum-hipotézisről beszéltek, azt állítva, hogy a kontinuum számossága az ettől különböző  $N_2$ .

A kontinuum-hipotézisről az 1960-as években az amerikai Cohen bebizonyította, hogy nem bizonyítható. Néhány olyan bonyolult érvet használt fel, amelyek a német Gödel 1940-es években kialakított nemteljességi tételén alapultak.

Akár Cantor  $N_1$ -ről szóló állítását fogadjuk el, akár azt, hogy létezik egy még nagyobb  $N_2$  számosság, úgy tűnik ezzel lezárult egy folyamat. Jelenlegi tudásunk szerint ez a három végtelen rendszám elegendő ahhoz, hogy bármit és mindent megszámláljunk a világegyetemben.

Nem tudunk a rejtély mélyére hatolni, hogy miért csak ez a három alapvető végtelen rendszám létezhet, azonban ismét a hármas szám érdekes megjelenésével találjuk szembe magunkat.

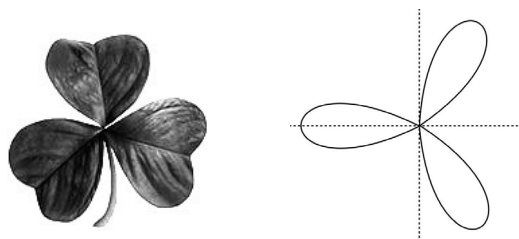
## 13. fejezet

### A HÁROMLEVELŰEKTŐL A HÁRMASPONTOKIG

Ebben a fejezetben a hármas szám biológiai és fizikai előfordulásait vizsgáljuk.

A biológiában számos helyen találkozunk a hármas számmal. Az olyan virágok és fák száma meglepően nagy, melyeknek három szirma, illetve levele van.

Gondoljunk csak a lóherére (eltekintve a véletlenül előforduló közmondásos négylevelű eseteket), amely a 13.1. ábra baloldalán látható.



13.1. ábra Háromlevelű lóhere és matematikai trifolium

Ha most azt hisszük, hogy ez a természetben csak véletlen, és nincs valamiféle kapcsolata a matematikával,

akkor kétszer is gondoljuk át. Léteznek nagyon vonzó formájú matematikai függvények, az ún. trifoliumok, amelyek egyszerű implicit kifejezésekből könnyen előállíthatók. Azért kis túlzás, hogy egyszerű kifejezésekről van szó, de a forma szépsége és a természettel való egyezése a 13.1. ábra jobboldalán biztosan észrevehető.

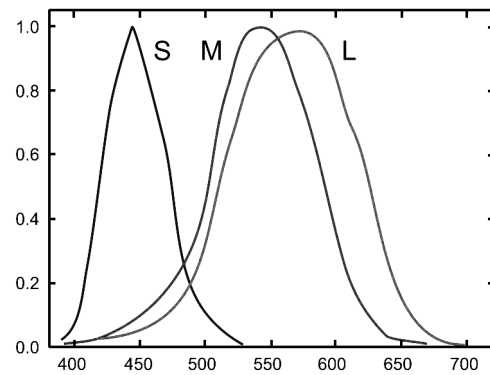
Továbbá, a természetben jelenlévő dolgokat három osztályba sorolhatjuk: ásványok, növények és állatok. Az is igen érdekes, hogy az élőlények három közös szimmetria-elve a gömbi, a sugaras és a kétoldali szimmetria.

Kétoldali szimmetria figyelhető meg a lepkéknél, a testüket elvágó síkra szimmetrikusak. Mi, emberek nagyjából a kétoldali szimmetrikus szervezetek közé tartozunk, ahogy a legtöbb állat is. A sugaras szimmetria azt jelenti, hogy a szimmetriatengely a test középpontján halad át. Példaként a különböző tengeri lényeket említhetjük, mint a medúza. Végül a gömbi szimmetria esetén a test a középpontjára szimmetrikus. Ilyen szimmetriával rendelkeznek a gömb alakú organizmusok, mint az egysejtűek.

A legérdekesebb biológiai tény a fizikából ismert, több színből összetett optikai fehér fényhez kapcsolódik. Három összetevő szín a vörös, a zöld és a kék.

E három szín biológiai következménye az emberi látás háromszínűsége, amely úgy nyilvánul meg, hogy szemünkben a látási receptorok három különböző

hullámhosszat nyelnek el. A 13.2. ábrán látható szemünk háromféle receptorának abszorpciója.



13.2. ábra Az emberi látás abszorpciója

A hosszabb hatókörű (L) receptorok az 580 nanométer körüli hullámhosszokra érzékenyek. Ez  $10^{-9}$  méter, a milliméter ezredrészének ezredrésze, valóban nagyon kicsi egység. A közepes hatókörű (M) receptorok leginkább az 535-545 nanométer körzetében, a legrövidebb (S) receptorok a 440 nanométeres érték körüli tartományban érzékenyek. Ez a három receptor érzékeli vörös, a zöld és a kék fényt.

A többi szín agyunk festékpalettáján keletkezik. Sárgát érzékelünk, ha mind a hosszú (vörös), mind a középső (zöld) sávban érzékeny receptorokat egyszerre ér bizonyos mértékű inger. A többi kevert színt akkor

érezkeljük, ha a különböző receptorok érzékenységi profilja átfedi egymást.

Látásunk és az optika csodálatos párosítása teszi lehetővé, hogy a három alapszín keverésével a teljes spektrumot érzékeljük. Érdekes módon csak az ember és néhány főemlős rendelkezik ezzel a képességgel: az állatok birodalmára nem terjed ki. Ez világosan jelzi evolúciós eredetét: akkor fejlődött ki, miután az ember és a főemlősök leváltak a származásfa fő ágáról. A három összetevő kialakulása csak a természet valóságához ragaszkodásából születhetett, vagyis a biológia alkalmazkodott az optikához – mindenestre érdekes.

A hármas szám a mechanikától a folyadékokig a fizika számos területén feltűnően megjelenik. A klasszikus mechanikában számos trichotómiát találunk.

Sok jelenséget leíró természeti törvényben három alapvető mennyiség szerepel: Newton második törvénye a legfeltűnőbb példa erre. A jól ismert képlet  $F = m \cdot a$ , azaz

$$F = m \cdot a.$$

Ez a mindennapi fizika egyik hasznos törvénye, a mozgó testek dinamikája, akár emberi erőről, akár autóról, vagy repülőgépről van szó. A törvényt háromszög alakú (!) formában is felírhatjuk

$$\frac{F}{m \cdot a}$$

amely lehetővé teszi, hogy bármelyik mennyiséget könnyen kiszámítsuk: ha a keresett adatot letakarjuk, és a másik kettő közötti összefüggést vesszük figyelembe. Például, ha a tömeget takarjuk le,

$$\frac{F}{a}$$

az eredmény, amely azt jelenti, hogy az erőt elosztva a gyorsulással megkapjuk a tárgy tömegét. Hasonlóképpen számítható ki a gyorsulás, ha azt takarjuk le.

Ha az erőt takarjuk el, természetesen az eredeti törvényt kapjuk eredményül.

Életünkben a törvény leglényegesebb megnyilvánulása a súlyunk, ami

$$G = m \cdot g$$

ahol  $g$  a gravitációs gyorsulás. E törvény miatt ugyanannak a személynek kevesebb a súlya a Holdon, mint itt a Földön. A gravitációs gyorsulás a kisebb tömegű Holdon kisebb, a mi tömegünk nem változik meg attól, hogy odautazunk.

Érdekes módon ez csak egy a három (!) mozgásra vonatkozó Newton-törvény közül, valójában ez a második. Az első törvény azt mondja ki, hogy az egyenletes

mozgásban lévő test megtartja egyenletes mozgását mindaddig, amíg egy külső erő nem hat rá. A harmadik törvény a jól ismert „minden akcióra következik egy reakció”, eredetileg a fizikai erőkre vonatkozott, ma már azonban mindennapos kifejezéssé vált.

Ha a fenti törvényben megfigyeljük a tömeget, ott is három mennyiség összefüggését kapjuk: tömeg = sűrűség · térfogat

$$m = \rho \cdot V.$$

Világos, hogy egy kis sűrűségű anyag (mint például egy gáz) nagy térfogata hoz létre egy bizonyos tömeget. Megfordítva, egy nagy sűrűséggel rendelkező anyag (például fém) ugyanezt a tömeget sokkal kisebb térfogatban éri el. A háromszög alakú elrendezés

$$\frac{m}{\rho \cdot V}$$

ebben az esetben is működik. Végül a Newton-törvénnyel összefüggő harmadik mennyiség-hármas a gyorsulással kapcsolatos. A  $v$  sebességet a test egy  $t$  idő alatt végbemenő gyorsulással éri el

$$v = a \cdot t$$

vagy a már ismerős háromszög alakban:

$$\frac{v}{a \cdot t} .$$

A keresett időt, – ami alatt a sebességet eléri – megkapjuk, ha letakarjuk  $t$ -t, az eredmény  $v/a$ , az összefüggés másik két elemét is hasonlóképpen számíthatjuk ki.

Összefoglalva, Newton három törvénye közül a második egy három mennyiség közötti háromszögletű összefüggésre vezetett, és ugyanígy e mennyiségek mindegyike egy triádból épül fel. A mi newtoni mechanikai világunk egy csodálatos, hármassokból felépített fa-szerkezet.

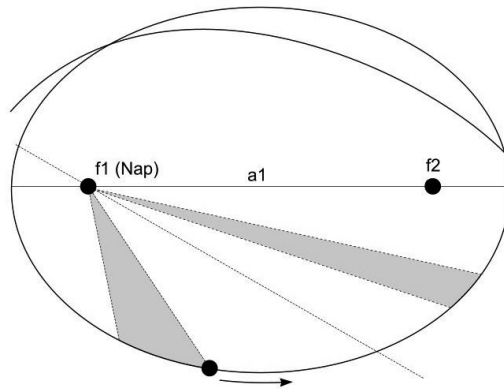
Kilépve a newtoni mechanikából a Naprendszerbe más, érdekes trichotómiákat figyelhetünk meg. Amióta megismertük a Naprendszert, azt is tudtuk, hogy a harmadik bolygón élünk. Néhány vélemény szerint ez az oka a hármasszám kitüntetett szerepének a mindennapi életben. De miután az előző fejezetekben olvastunk a hármasszám matematikai szerepeiről, tudjuk, hogy többről van szó.

A bolygók mozgását is három törvény írja le, melyeket Kepler, az osztrák középiskolai tanárból lett csillagász fogalmazott meg először matematikai formában az 1600-as évek elején. Tycho Brahe dán csillagásszal dolgozott együtt, akinek az 1500-as évek második felében végrehajtott aprólékos megfigyelései képezték a Kepler-törvények alapját. Ezek a következők:

A bolygók pályája ellipszis, melynek egyik fókuszpontjában található a Nap.

A bolygót és a Napot összekötő egyenes egyenlő időintervallumonként egyenlő területeket sűrol.

A bolygó Nap körüli keringési ideje egyenesen arányos a pálya-ellipszis fél-főtengely négyzetgyökének harmadik (!) hatványával.



13.3. ábra Kepler törvényei a bolygók mozgásáról

A 13.3. ábra bemutatja a törvényeket, a Nap körül keringő bolygó ellipszis pályájának egyik fókuszpontjában ( $f_1$ ) található a Nap, ahogy az első törvény állítja. Amikor a bolygó a Naphoz legközelebb halad, ezt perihéliumnak nevezünk. A legtávolabbi pont az aphélium. A sátozott területek egyenlők, a második törvénynek megfelelően. Végül a bolygó keringési ideje a fél  $a_1$  távolság négyzetgyökének harmadik hatványával arányos.

Egy másik bolygó, – melynek más a keringési ellipszis tengelye, de egy közös fókuszpont van (az  $f_1$ -en áthaladó ferde pontozott vonal) – az ábrán látható ellipszis-részen haladva keresztezheti az első bolygó pályáját. Néhány bolygórendszerben ez nem szokatlan, de a legtöbb esetben nem ugyanaz az ellipszisek síkja, ezért nem léphet fel katasztrofális ütközés.

Egy lábjegyzet utal arra, hogy először Kepler gondolkodott a napjainkban elterjedő intelligens tervezés filozófiájáról. Meggyőződése szerint Isten egy intelligens tervnek megfelelően alkotta meg az univerzumot, és ez a terv tanulmányozással, és gondolkodással az emberek számára is megismerhető.

Más fizikai szakterületeken is alkalmazzák a Newton-féle három elemet tartalmazó törvényeket. Például az elektromos áramkörökben a feszültség ( $U$ ), az áramerősség ( $I$ ) és az ellenállás ( $R$ ) kapcsolata Ohm-törvényében:

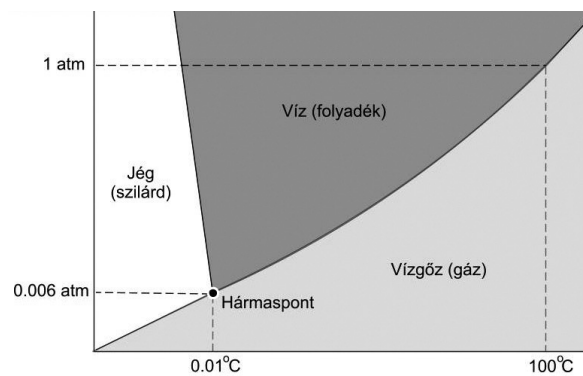
$$U = I \cdot R.$$

Egyéb fizikai törvények esetén, például a folyadékok mechanikájában más analógia lép fel. Életünkben a három jelentétének egyik leglényegesebb mozzanata a folyadékoknál jelenik meg.

A minket körülvevő legtöbb szerves anyag háromféle halmazállapotban fordul elő: folyékony, szilárd és gáz. A három különböző halmazállapot létezése néha

meglepő, mert bizonyos anyagok esetén hozzá szoktunk, hogy egyféle állapot tartozik hozzá. Az általunk használt fémek általában szilárdak, és nem gondolunk folyékony fémekre, habár különösen a feldolgozás során, az olvasztókban folyékonyak. Még hangsúlyosabb az eltérés, ha gázzá alakulnak.

Az életet fenntartó oxigén gázra ritkán gondolunk folyékony állapotban, pedig az űrbe küldött rakéták hajtóművében folyékony az oxigén.



13.4. ábra A víz hármaspontja

Speciális hőmérséklet- és nyomástartományban az anyagok halmazállapotát mutatja a 13.4. ábra; a vízszintes tengelyen a hőmérséklet, a függőleges tengelyen a nyomás látható. Az ábrán életünk alapvető folyadékának, a víznek különböző halmazállapotai jelennek meg, a szilárd jég és a gáz halmazállapotú vízgőz.

Létezik egy speciális hármas metszéspont a víz esetében, ahol mindhárom halmazállapot előfordul. Ez egy kényes egyensúlyi pont 0,01 Celsius fok hőmérséklet és közelítőleg 0,006 atmoszféra nyomáson, nem éppen mindennapi körülmények között. Távol van életünk megszokott feltételeitől, az 1 atmoszféra nyomástól, és a 100 fok alatti, kellemes 20 Celsius fok körüli hőmérséklettől.

A hármaspont körül a víz képes olyan halmazállapot-változtatásra, amikor a közbülső fázist átugorja.

Például, a hármaspont alatti nyomás esetén a víz szilárdból gáz állapotúvá változik, azaz ha a jeget melegítjük, olvadás nélkül gőz keletkezhet. Ez a szublimáció, míg az ellentétes folyamatot, amikor gázból közvetlenül szilárd lesz, depozíciónak nevezzük. A víz esetében ez utóbbi a jól ismert jégvirág-képződés jelensége.

Meglepő, hogy ezen a fizikai területen is találkozunk a hármas számmal. Azonban elképzelhető, hogy léteznek más világok, ahol a megjelenő élőlények a mienktől különböző fizikához alkalmazkodnak. Képzeljünk csak el egy világot, ahol nagyon alacsony a légköri nyomás, és a lakók jóval a hármaspont alatti régióban élnek. Ők sohasem találkoznának a víz folyékony alakjával, egy jég- és gázvilágban élnének.

## 14. fejezet

### MINDENNAPI TRICHOTÓMIÁK

Elérhetetlennek tűnik, hogy a hármas szám fizikai életünkben betöltött minden alapvető szerepét megértsük, de hogy ilyen sokszor szerepel, annak oka éppen az, hogy a hármas szám mindennapi életünkben kiemelkedő jelentőségű.

A köznapi életben sokszor találkozunk a hármas számmal, kezdve a babonáktól az irodalomig, a sportban, a népművészetben, az oktatásban, a kormányzati rendszerben. Életünkben annyi a trichotómia, hogy visszariadunk.

Nézzük a babonákat. Gyakran mondjuk, hogy „három a magyar igazság”. Máskor melankolikus érzelmeket tükröz, mint az a kifejezés, hogy „háromszor nyoszolyólány, de egyszer sem menyasszony”. Harmadszor, néha komor hangulatú, mint a „harmadszor is elbukott”. Számos alkalommal a „reggel, délben, este” időtrichotómia megfelel az emberi élet három korszakának: a gyermek-, felnőtt- és időskornak.

Irodalmi utalásokban is bővelkedünk; gondoljunk Dumas Három testőrére, vagy Csehov Három nővére.

Számos ázsiai kultúra irodalmában szerepel a három majom: az egyik nem hall, a másik nem lát, a harmadik nem beszél.

A sport területe, különösen az amerikai nemzeti sport, a baseball hemzseg a trichotómiáktól. Három bázis, három kiütés, három kiesés kezdetnek. Három külső védő van, és a hazafutást kivéve az egyik legkívánatosabb ütés is a tripla.

A csapat teljesítményét is három dologgal mérik: futás, ütés és hiba. Az ütési és védekezési százalékokat három tizedesig számítják, és a dobójátékosok futási átlageredménye is háromjegyű.

Sok nemzetközi sporteseményen, olimpián és különböző sportágak világversenyein háromféle: arany-, ezüst- és bronzéremmel díjazzák a győzteseket. A lóversenyen is háromféle fogadás létezik: helyre, tétre, befutóra; és nem hagyhatjuk ki a legáhítottabb lóverseny-díjat: a Tripla Koronát.

A legtöbb sportágban két csapat versenyében háromféle eredmény lehetséges: győzelem, vereség vagy döntetlen. Minden labda- játékban, ha egy játékos háromszor eredményes, mesterhármast ér el.

A legtöbb sportágban, kezdve a pingpongtól a röplabdáig három szett és játék közül a legjobb dönti el, hogy ki a győztes. Az iron-men versenyeken háromféle sportágban küzdenek meg: úszás, futás és kerékpár.

Az amerikai futballban három (plusz egy) letevés létezik, sőt a krikettben is három krikett-kapufa van a pálya mindkét oldalán. Végül a bokszingben három kötél van, és a híres háromporondos cirkusz zárja ezt a hatásos, de korántsem teljes felsorolást.

Hajlamosak vagyunk arra, hogy hárombetűs rövidítéseket alkossunk az élet minden területén, az egyetemektől kezdve, mint a BME, az egyesületeken át, mint például MTK, FTC, vagy UTE, egészen a híres emberekig, például JFK. Azután három betűből álló betűszavakat használunk szervezetek (MTA, MTI) és TV állomások (CNN, RTL). Az általános iskolában is az ábécét tanuljuk, és nem az ABCD-t.

A szólások között is számos csodálatosan kifejező hármast találunk. Gondoljunk csak a „horog, zsinór, nehezék”, a „kövér, buta és boldog”, a „vér, veríték, könyvek”, az „aláírva, pecsételve, kézbesítve”, vagy a „zavár, tus, puskacsó” kifejezésekre. A felsorolást folytathatjuk: mindnyájunknak van „mit tenni, hova menni és kivel találkozni”. Azután gyakran mondjuk, hogy „valamilyen módon, alakban vagy formában”, „megy, megy, mendégél”, „vigyázz, kész, rajt” és „mondj három okot, hogy miért...”. A lista meglepően hosszú és elgondolkodtató.

Ha vicceket mesélünk, gyakran három szereplő tűnik fel. Általánosan ismertek az angol, ír, skót, vagy a lelkész, pap, rabbi viccek. És ne feledjük a szóke, barna

és fekete nőről szólótréfákat, vagy az orvos, ügyvéd, mérnök-vicceket.

Naponta háromszor étkezünk, általában három fogást eszünk, három tányéron. Rendszerint három evőeszközt használunk: kanalat, villát és kést. Az egyik legnépszerűbb szendvics a klub-szendvics háromrétegű. A másik kedvenc a BLT szendvics tükrözi a hárombetűs rövidítések iránti vonzalmunkat: a három összetevő kezdőbetűjéből áll (Bacon – szalonna, Lettuce – saláta, Tomato – paradicsom). A steaket is ehetjük véresen, közepesen vagy jól átsütve; és végül kávé, tea, vagy deszertital zárja le a vacsorát. Hármások bőven akadnak a konyhában.

Játszhatunk Tic-Tac-Doe játékot (három szó, és mindhárom három betűs), melyben a nyerő három szimbólumot ér el egy sorban, vagy oszlopban. A kártyajátékokban is három figura szerepel (Bubi, Dáma, Király), ezt egyesek a fiú, anya, apa manifesztációjának tekintik.

Ha kilépünk otthonról, mindenütt hármásokba ütközünk. A kocsik induláskor üresben van, a garázsból előre, vagy hátrafelé tudunk kiállni, az utca-sarkon a forgalmi jelzőlámpán három szín jelenik meg: piros, sárga és zöld. Háromsávú autópályán utazhatunk és menet közben általában a legközelebbi három kijáratot tüntetik fel. A nyilvános telefonoknál ötcentes, tízcentes és negyeddolláros használható.

Az oktatási rendszer háromszintű: alap-, közép- és felsőfokú. Az általános iskolában három dolgot tanítanak: „olvasni, írni és számolni”. Magasabb oktatási szinten három fokozat létezik: Bachelor, Master, Doctor.

A különböző fokozatok is háromféle diplomát adhatnak: cum laude, magna cum laude és summa cum laude. A felsőfokú oktatási intézményekben a tanárok is három lépcsőt érhetnek el: adjunktus, docens és egyetemi tanár. Gúny rejlik a következő hármas mondásban: „aki ért hozzá, csinálja; aki nem ért hozzá, tanítja; aki tanítani sem tud, a tanárokat tanítja”.

Azután három időben: múlt, jelen és jövő időben beszélünk. Három személyt különböztetünk meg a ragozásban. A harmadik személy is lehet hímnem, nőnem, semleges nem. Három mondattípus van attól függően, hogy kijelentő, kérdő vagy felszólító módban beszélünk, pontot, kérdőjelet vagy felkiáltójelet írunk. A melléknévfokozás is háromféle lehet, alap-, közép- és felsőfok: jó, jobb, legjobb, vagy rossz, rosszabb, legrosszabb.

Valószínűleg az első fejezetben már említett római triumvirátus öröksége, hogy az amerikai demokratikus politikai rendszer három részből áll: végrehajtó, törvényhozó és bírói testületből. A három rész a kiegyensúlyozott hatalom bizonyos szimmetriáját jelenti. Egy ember könnyen a hatalom kísértésébe eshet, és zsarnokká válhat. Ha két ember gyakorolja a hatalmat, patt-helyzet alakulhat ki, olyan megoldhatatlan konfliktus,

amely csak az egyik ember elmozdításával oldható fel, így a rendszer potenciális zsarnokságot rejt magában. Három tag esetén azonban a többség mindig létrehozza az egyensúlyt, és biztosítja a többség előnyét. A kétezerezelőtti leleményes rendszernek ma is van gyakorlati jelentősége.

Egy újabb trichotómia az élethez, a szabadsághoz és a boldoguláshoz való jog az Alkotmányban szerepel, a kormány „a népből, a nép által és a népért” van, bár néhányan vitatják ezt.

A katonai erők is három fő ágra oszthatók: gyalogság, tengerészet és légierő.

A tisztek is három rangot, azon belül három fokozatot érhetnek el. A tiszti fokozatok: alhadnagy, hadnagy, főhadnagy; a főtiszti fokozatok: százados, őrnagy, alezredes; a tábornoki fokozatok: ezredes, vezérőrnagy, altábornagy.

Ezek a trichotómiák nem azon alapulnak, hogy ezek a funkciók velejáráan három részből állnak, hanem inkább köszönhetőek különös vonzódásunknak a hármas számhoz. Alkalmazásuk a szimmetria és egyensúly, vagy a hármas szám nyújtotta kötelékoldó lehetőségnek is köszönhető. Mindenesetre tudott, hogy a hármas szám több ezer évig jelentős szerepet töltött be az emberi történelemben, és fizikai életünk lényeges velejárája, ezért mára elterjedt a mindennapi életben.

## 15. fejezet

### HÁROM AZ ÉLET

Teljesen világos, hogy a három alapvető szám volt az emberi számlálás kezdetén, a többszörösség egyfajta kapuja. Sok ősi számrendszerben az egy, kettő és három leírására közös jeleket használtak. Majd a három után új szimbólum, vagy elrendezés jött. Azonban ez lehet, hogy csak az emberi tanulási folyamat megtestesítésének tekinthető.

Tagadhatatlan a geometriában a háromszög, mint alapvető építőkö jelentősége. A háromszögben – egyszerűsége ellenére – nagyon erőteljes képességek rejlenek.

A háromszög alakú szerkezetek mechanikai előnyük miatt a mérnöki munka minden területén elterjedtek. Sok híd szerkezete háromszög alakú vázából épül fel. Sőt, a magasépítésű derékszögű szerkezeteknél is háromszög alakú sarokmerevítést alkalmaznak, hogy az összecsuklást megelőzzék. Egy háromszög alakú szerkezet sohasem csuklik össze. Nincs még egy olyan szerkezeti egység, amely helyettesíthetné. Ez egy olyan erős tulajdonság, mely a háromszöget örökre **életünk** alapvető részévé teszi.

Azután elérkezünk a geometriát az algebrával összekötő trigonometriához. A trigonometriai számítások távol esnek a tényleges geometriai problémáktól.

Mondhatjuk, hogy a trigonometriai függvények az algebrában olyan alapvető építőkö-szerepet játszanak, mint a valóságos háromszögek a geometriában.

A fizikai **élet** sok folyamatát periodikus függvények írják le, melyek vagy trigonometriai összetevőkből épülnek fel, vagy jól megközelíthetők trigonometriai függvényekkel.

A fizikai világegyetem, legalábbis a mi léptékünk szerint háromdimenziós. A legtöbb fizikai jelenséget a háromdimenziós koordináta-rendszerben egyszerű matematikai eszközökkel leírhatjuk. A matematikai eszközök egyszerűsége majdnem mindig arra utal, hogy optimálisan, és valószínűleg helyesen értelmeztük a jelenséget. Eltekintve a relativisztikus rendszer negyedik dimenziójától, az időtől, vagy a hipotetikus húr-dimenzióktól, három dimenzióban **élünk**.

A polinomok esetében a harmadik hatvány a harmadfokú spline hatékony kiszámítási módszeréhez vezetett. Az ókori és a modern mérnöki munkában, valamint az ergonómiában is alkalmazták. Az ergonómiai alkalmazások közül kiemelhető, hogy segítségével **életünk** legfontosabb fizikai megjelenését, a testünket írhatjuk le.

Megállapítottuk, hogy nagyon előnyös három lépésben elvégezni, vagy három összetevőre bontani valamit. A mátrixok tridiagonális alakja igen látványos. Érdekes elmélyedni abban, hogy mindössze három átló megtartja a mátrix összes jellemzőjét, és hogy potenciálisan végtelen számú művelet szükséges, ha háromnál kevesebb átlóra törekszünk. Ez utóbbi tény olyan homályos területre vezet, amely filozófiai, fizikai és matematikai értelemben **életünk** legkevésbé megértett része: a hármas szám, mint a végtelenbe vezető út kapuja és kapusa.

## UTÓSZÓ

A hármas szám régészeti és történelmi vonatkozásaitól eljutottunk a fizikai világban és mindennapi életünkben történő alkalmazásokig, ezzel igazolva a könyv ambiciózus címadását. Tekintélyes matematikai területeket jártunk be utunk során.

A hármas szám még számos jelentős matematikai területen fordul elő: olyan természeti törvényekben, amelyek életünk mechanikai jelenségeit írják le, a hármas különböző módon kap szerepet. Ezek tárgyalását azonban a kívánt matematikai szint korlátozta.

Meglehetősen merész feltételezés lenne, hogy megértettük azokat az okokat, amiért a hármas számnak egyedülálló a szerepe. Csak remélni tudjuk, hogy rávilágítottunk, mennyire titokzatos és mágikus ez a szám, mi a gyakorlati jelentősége, vagy, hogy sorompó-természete milyen hihetetlen, és az olvasó képzeletét rabul ejtve továbbgondolásra ösztönöztünk.

Bár a hármas szám megjelenései között lévő összefüggéseket nehezen lehet egységbe foglalni, remélhetőleg a jövőben világosabbá válnak, ahogy kezdetleges ismereteink is az univerzumról. Végző soron az idő is három különálló szakaszra osztható: múlt, jelen és jövő.

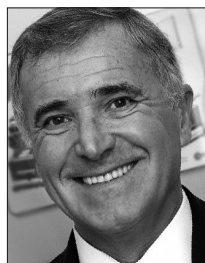
## TARTALOM

Előszó a magyar kiadáshoz .....	5
A fordító ajánlása .....	6
Előszó .....	7
<i>1. fejezet</i>	
Trilitonok és triptonok .....	9
<i>2. fejezet</i>	
Egy, kettő, három és a számlálás .....	20
<i>3. fejezet</i>	
Az ókor három kihívása .....	32
<i>4. fejezet</i>	
Görög matematikusok és a háromszögek .....	43
<i>5. fejezet</i>	
A trigonometriai híd .....	54
<i>6. fejezet</i>	
Háromszögelés és háromszögesítés .....	65
<i>7. fejezet</i>	
Háromdimenziós univerzum .....	76
<i>8. fejezet</i>	
A három, mint prímszám és további kutatások .....	87

9. fejezet	
Francia rögeszme: a harmadik hatvány .....	98
10. fejezet	
Olasz támadás a köb-sorompó ellen.....	110
11. fejezet	
A háromláb elve .....	122
12. fejezet	
Halmaz harmadolás és számolás a végtelenig .....	134
13. fejezet	
A háromlevelűektől a hármaspontokig .....	146
14. fejezet	
Mindennapi trichotómiák.....	157
15. fejezet	
Három az élet.....	163
Utószó.....	166

AUTEURS MIA KAPΔΙΑ ΓΙΑ ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ UN CUORE PER AUTORI ET HJERTE FOR FORFATTERE EEN HART VOOR  
EEN HART VOOR FORFATTERE UN CORAZÓN POR LOS AUTORES YAZARLARIMIZA GÖNÜL VERELİM ŞİVÜNKET SZERZŐIN  
EEN HART VOOR FORFATTERE UN CORAZÓN POR LOS AUTORES YAZARLARIMIZA GÖNÜL VERELİM ŞİVÜNKET SZERZŐIN  
EEN HART VOOR FORFATTERE UN CORAZÓN POR LOS AUTORES YAZARLARIMIZA GÖNÜL VERELİM ŞİVÜNKET SZERZŐIN  
EEN HART VOOR FORFATTERE UN CORAZÓN POR LOS AUTORES YAZARLARIMIZA GÖNÜL VERELİM ŞİVÜNKET SZERZŐIN  
EEN HART VOOR FORFATTERE UN CORAZÓN POR LOS AUTORES YAZARLARIMIZA GÖNÜL VERELİM ŞİVÜNKET SZERZŐIN  
EEN HART VOOR FORFATTERE UN CORAZÓN POR LOS AUTORES YAZARLARIMIZA GÖNÜL VERELİM ŞİVÜNKET SZERZŐIN  
EEN HART VOOR FORFATTERE UN CORAZÓN POR LOS AUTORES YAZARLARIMIZA GÖNÜL VERELİM ŞİVÜNKET SZERZŐIN  
EEN HART VOOR FORFATTERE UN CORAZÓN POR LOS AUTORES YAZARLARIMIZA GÖNÜL VERELİM ŞİVÜNKET SZERZŐIN  
EEN HART VOOR FORFATTERE UN CORAZÓN POR LOS AUTORES YAZARLARIMIZA GÖNÜL VERELİM ŞİVÜNKET SZERZŐIN

## A Szerző



Dr. Komzsik Lajos, a Budapesti Műszaki Egyetemen végzett, majd az 1970-es években a Magyar Hajó- és Darugyárban mérnökként dolgozott. Harminc éve Amerikában él, ahol mérnöki-matematikai tudását az ipar szolgálatába állította. Számos nemzetközileg elismert angol nyelven írt matematikai és mérnöki tárgyú könyv szerzője, melyek közül néhány

idegen nyelven (kínaiul, japánul és magyarul) is megjelent. Ez a könyv tükrözi a szerző meggyőződését, mely szerint annak, hogy számtalanszor fordul elő életünkben a hármas szám, mélyebb oka van, melyet még nem teljesen értünk.